數學百子櫃系列(八)

概率萬花筒

教育局　課程發展處數學教育組

概率萬花筒

蕭文強　林建　著

書　　名　概率萬花筒
作　　者　蕭文強・林建
出版發行

版　　次　1981 年初版
2007 年再版
2010 年修訂版

編者的話

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深教師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《概率萬花筒》是這個系列的第八冊。

概率及統計學的基本概念在數學課程中佔有十分重要的位置。新高中數學課程不僅為學生提供一個途徑獲取、組織和應用訊息，並且培養學生共通能力，尤其是運用數學中解決問題、推理及傳意的能力，當中延伸部分單元一(微積分和統計)的內容涉及很多概率及統計學的概念。

坊間已有很多與概率及統計學有關的書籍，但特別為香港學生編寫的卻不多。《概率萬花筒》一書正好填補這方面的一個缺口。《概率萬花筒》包括很多有趣的概率例子，相信本書的內容定能擴闊讀者的視野，引發他們對概率的興趣。本書能夠再度出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向本書作者蕭文強教授及林建教授致以衷心的感謝。最後更多謝香港統計學會會長鄧偉江先生和香港統計學會副會長楊良河博士的協助，將原先由香港統計學會擁有的本書的版權轉送予教育局。本局現將本書重新印製，讓更多在職教師及學生能再次閱讀本書的精彩內容。

如有任何意見或建議，歡迎致函:

九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任(數學)收
(傳真: 3426 9265 電郵: ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處
數學教育組

前言

閱讀這本書是一件賞心樂事。

一位南非的數學家曾說：「只要透過正確的教授方法，數學是很容易掌握的科目。」同樣地，透過正確的教授方法，統計也是很容易掌握的學科。

概率在一般的教科書中，往往是呆板又複雜的一門統計學問。這本書卻能以身邊的事物為例子，深入淺出又趣味盎然地帶出概率的知識及它在不同範疇上的應用。讀這本書，除了能增進統計知識外，還能訓練邏輯思維，培養自己成為一個明辨慎思的人。

我在此推薦老師使用這書向學生教授概率的概念，並鼓勵同學多讀這書，以提升統計知識和邏輯思考的能力。

希望你能領略閱讀這本書的樂趣。

香港統計學會會長　鄧偉江

2009 年 9 月 15 日

修訂版序言

最初寫作這本小書，是在 1977 年我們為了準備一次普及講座搜集整理了不少材料，便想到與更多數學教師分享這些例子，由廣角鏡出版社於 1981 年出版。當時還未曾認真想及如何在教學上運用這些材料，過了幾年後，我們再度合作，在 1986 年做了一項調查，關於本地中學數學課程內統計學部份的教學情況。調查報告提到四點有待改善：（一）教材與學生日常生活沒有密切關聯；（二）教授方法過於刻板；（三）教學重點放在計算技巧而非概念；（四）統計學的非數學部份每被忽略。[可參考全文：P.H.Cheung, K. Lam, M.K.Siu, N.Y.Wong, An appraisal of the teaching of statistics in secondary schools of Hong Kong, *Hong Kong Science Teachers Journal*, 14(1986), 171-186。] 當時我們也提出了一些建議，就在同一年秋天香港統計學會推行了其中一項建議，主辦了第一屆中學生統計習作比賽，至今已經辦了二十三屆。今年香港統計學會又開始主辦另一項新的活動，叫做中學生統計創意寫作比賽，也是旨在通過活潑的課外活動，提高中學生對統計及概率的興趣和認識。

這本差不多在三十年前寫成的小書，看來仍然可以從旁支持這些有意義的課外活動，提供一些有用的材料。承蒙教育局課程發展處數學組及香港統計學會協力把此書第三次出版，讓更多數學教師和中學生可以用作參考讀物，身為作者我們是非常感激的。除了把第二版（由香港統計學會於 2007 年重版發行）的錯漏更正，我們沒有添加書的內容，只是增添了一個加篇，收入兩篇我們各自為中學生統計創意寫作比賽擬寫的範例。因限於字數，這兩篇短文都是點到即止。我們最希望見到的，自然是越來越多姿采豐富的例子，在概率世界萬花齊放！

蕭文強　　林建

2009 年 8 月 27 日

再版序言

二十五年前我們寫了這本小書，在序言裡把構思緣由和寫作背景說明清楚。二十五年後，我們再為它寫這篇序言。

在那個年頭本地出版的數普書籍不算很多，銷路也不廣。（固然，有例外者，如《數學和數學家的故事》系列，由李學數（李信明）撰寫，內容吸引，大受歡迎，影響了一代又一代的數學教師。）我們的書出版後過不了幾年便在書局找不到了。值得安慰者，有不少朋友讀了這本小書後，覺得對他們的教學頗有點幫助，也有不少朋友詢問怎樣可以買到它。當時我們也無能為力，如今十分感激香港統計學會的朋友熱心幫忙，把這本小書重版，讓更多讀者跟它見面。

曾經一度我們有意把原書修訂，添加多些例子。只是大家在八十年代後期開始各自在教學科研崗位上忙碌，少了那份相聚閒聊的時間和心情，也就不了了之。（這本小書在七十年代後期之能成形，正是源於這種茶餘飯後不帶“戰略目的”之談天論道！）因此，這次有機會把原書重版，我們只是更正了一些手民之誤，卻沒有對原書的內容作任何增添刪改。要出版修訂增添本，或者期諸來日吧。

蕭文強　林建

2007 年 1 月 23 日

序言

我們覺得時下一般教科書在討論概率這個題材時，內容或者過於嚴肅刻板，或者只用擲骰抽紙牌之類為例子，容易使人誤認為概率論就是賭博的學問。有些寫得很好兼且素材豐富的書本，通常起點較高，不適合初中和高中低年級學生的程度。早在 1977 年 12 月，在一次由大學畢業同學會主辦的數學研習會上，我們已經指出這一點，還舉了一些有關概率的例子供出席該研習會的教師參考。為了準備那次講座，我們看了點書，收集了一些資料，之後還陸續搜集到更多的材料，幾年下來手頭上竟也積累了不少可以向中學生講解明白的例子，於是便計劃把這些材料寫下來，給有興趣的讀者作為參考讀物。固然，大部分例子是取材於別的書本文章，來源不能一一盡錄。但我們相信，把這些材料集中起來，加以修飾，使中學生也能夠自行閱讀，亦不失為一件有意思的工作。

除了介紹概率論之外，我們也希望藉這眾多例子擴闊中學生對數學的視野。概率論只是數學的一門分支，尚且觸及這麼多的領域，其餘可想而知。同時，我們也希望通過這些例子，促使中學生活躍地思考問題，跳出刻板式操練的框框。例如，不妨先從特殊例子做起，或者運用類比、推廣來猜測答案，再仔細分析、驗證。即使解答了問題，也不妨嘗試從不同角度再看它，以求深一步的瞭解。並且試圖把問題推廣，看看能否解決。因此，我們特意在例子中加插一些供讀者繼續探索的問題。

這本小書是寫給誰的呢？我們希望是寫給中學生的，包括初中高中學生，故力求由淺入深，避開不必要的技術性細節而直白說出中心思想（涉及技術性細節的材料，便留給有興趣深入探討的讀者）。但限於學識功力，我們知道未必能做得到這

點，所以希望教師們也參考這本小書，把合用的材料整理後介紹給學生。每一章跟前面各章介紹過的概念當然是有關連，但例子卻幾乎都是獨立的。如果讀者明白了那一章的引論後，便可以自由選看那一章的例子，不必依照書中的次序，不喜歡看的略去不看亦無妨。

最後，很感激關心這本小書的朋友，全靠他們的熱心幫忙，才使這本小書和讀者見面的概率從 0 增加至 1。

蕭文強　林建

1981 年 12 月

目錄

目錄

目錄

第一章

概率是什麼？

「這件事很可能發生」，「這不大可能吧」，你們平日一定說過這種有關「可能性」的話。粗略地說，概率論是一門研究「可能性」的數學。我們把「可能性」這個概念數量化了，用一個在 0 和 1 之間的數來表示某一事件發生的可能性，這個數就叫做那事件的概率（Probability）。概率越接近 1，事件發生的可能性越高；概率越接近 0，事件發生的可能性越低。

必然現象和偶然現象

自然界的現象，概括地可分為必然現象和偶然現象。某些現象，在一定的條件下，是必然發生的。例如日出於東方；例如在一定氣壓底下，把水加熱至 100ºC 水便沸騰。這些現象的發生，是肯定的，是必然的，統稱為必然現象。另外一類現象，它們發生與否，事前不能肯定。例如明天天氣如何，可能天晴、可能下雨、也可能天陰；例如在母親未受孕前，嬰兒的性別是男是女，不能預知。這些現象的發生，是不肯定的，是偶然的，統稱為偶然現象。對偶然現象來說，我們可以說它發生的可能性高，或是可能性低，即是說偶然現象的發生有它的概率。概率論就是研究偶然現象的科學。

科學研究的一個目的，是要找出事物間的規律。既然概率論是研究偶然現象的科學，它的任務就是要找出有關偶然現象的規律。但問題來了，偶然現象所以成為偶然現象，正是因為它不可預卜，既是如此，又何來規律？「偶然」和「規律」，不是自相矛盾的概念嗎？讓我們借助嬰孩性別這個例子來解答這個問題吧。下面（見表 1.1）是從 1972 年至 1977 年每年在香港出生的男嬰女嬰的統計數字。雖然嬰兒的性別在母親受孕前

年份	男嬰數目	女嬰數目	男嬰相對頻率
1972	41472	38865	0.5162
1973	42282	39708	0.5157
1974	42966	40613	0.5141
1975	41519	38240	0.5205
1976	40775	37727	0.5194
1977	41330	38687	0.5165

表 1.1

是不可卜，但規律還是有的。從統計數字我們發覺男嬰的相對頻率（Relative Frequency）徘徊於 0.51 附近，是相當穩定的。讓我們再看一些別的地區的統計數字，下面（見表 1.2）是 1935

月份	男嬰數目	女嬰數目	男嬰相對頻率
1	3748	3537	0.514
2	3550	3407	0.511
3	4017	3866	0.510
4	4173	3711	0.529
5	4117	3775	0.522
6	3944	3665	0.518
7	3964	3621	0.538
8	3797	3596	0.516
9	3712	3491	0.515
10	3512	3391	0.509
11	3392	3160	0.518
12	3761	3371	0.527

表 1.2

年從一月至十二月每月在瑞典（Sweden）出生的男嬰女嬰的統計數字，再下面（見表 1.3）是在美國（U.S.A.）出生的男嬰女嬰的一些統計數字，顯示了相對於每 1000 名女嬰的男嬰數目。看來，在不同的地區，在不同的時間，男嬰的相對頻率仍然徘徊於 0.51 附近。我們就把這個穩定的相對頻率叫做「出生嬰孩是男」這個事件的概率。要注意的，當我們說某事件的概率是

p，是表示如果你對那事件觀察一次，你發覺它發生的可能性是 p。

年份	相對於每 **1000** 名女嬰的男嬰數目	男嬰相對頻率
1935	1053	0.5129
1940	1054	0.5131
1945	1055	0.5134
1950	1054	0.5131
1955	1051	0.5124

表 1.3

例如在上述的例子，一名新生嬰孩有略超過五成少許的機會是男的。但那事件的相對頻率，卻只有當你對那事件觀察了很多很多次後，才算出來，而且它還隨觀察次數而變動的。偶然事件的規律，就在於經多次觀察後，它有個相當穩定的相對頻率，可以當作是它的概率。換句話說，「概率」是把「相對頻率」抽象化了的概念，或者反過來說，「相對頻率」是「概率」這個抽象概念的現實體現。概率論裏面有條基本定理，叫做「大數定律」（Law Of Large Numbers），就是把「概率」和「相對頻率」這兩個概念給予數學化的處理。它指出當觀察次數足夠多時，事件發生的相對頻率通常很接近事件發生的概率，而且當觀察次數越多，它們接近的可能性便越高。

讓我們再看一個數學史上著名的實驗以說明概率和相對頻率的相互關係。在 1777 年法國人蒲豐（Conte de Buffon）提出一個有趣的問題：「在平面上畫上一組平行線，每兩線的距離為 a。在平面上隨意投一枚針，針長為 ℓ（ℓ 小於 a），問這枚針落在平面時與一平行線相交的概率是多少？」在投針前無法預卜投下的針是否與一平行線相交，所以「針與一平行線相交」是個偶然事件。蒲豐算得那概率是 $2\ell/\pi a$（這兒出現的 π 就是圓周率！），如果令 $a = 2\ell$，那概率便是 $1/\pi$ 了。假定投 N 次針後，發覺其中 M 次投的針與一平行線相交，那麼 M/N 就是「針與一平行線相交」的相對頻率。根據「大數定律」，當

N 是足夠大時，$M／N$ 通常很接近概率 $1／\pi$，所以通常 $N／M$ 很接近 π。我們甚至可以利用這個投針實驗來求 π 的近似值，以下是一些人的試驗結果（見表 1.4）。通過這樣一個偶然事件的實驗，竟然可以估計數學上一個著名的常數數值，誰還說偶然事件無規律可尋呢？

實驗者	年份	投針次數	π 的實驗值
胡夫（WOLF）	1850	5000	3.1596
史勿夫（SMITH）	1855	3204	3.1553
福斯（FOX）	1894	1120	3.1419
拉薩連尼（LAZZARINI）	1901	3408	3.1416

表 1.4

上面我們說明了偶然性蘊含了必然性，反過來說，在某些情況下，必然性是建築在偶然性之上。讓我們以氣體壓力為例，如果容器內有一定質量的氣體，容器壁就會受到氣體的壓力。在一定的溫度底下，氣體加諸容器壁的壓力是一個常數。容器內的氣體，是由無數氣體分子組成，壓力的產生，是由於氣體分子的運動，在運動過程中，有些氣體分子撞容器壁，對容器壁施加壓力。氣體分子的運動狀況，非常雜亂無章，每粒氣體分子就像俗語的「盲頭烏蠅」到處飛來飛去，所以我們不妨認為每粒氣體的運動狀況是個偶然現象。既然是偶然，那麼壓力的大小不也是偶然現象嗎？為什麼壓力卻是個常數呢？原來儘管每一粒氣體分子的運動並不確定，但容器內有億萬粒氣體分子，總的來說便有一定數目的氣體分子會撞容器壁。根據「大數定律」這個數目十分穩定，反映出來的物理現象，便是在一定溫度和容量底下，氣體的壓力是個常數。

通過偶然現象，有時更容易解釋某些事物的規律。物理學的一門分支，叫做統計力學（Statistical Mechanics），便是採取了這個觀點。讓我們避開高深的數學，用一個例子說明如何運用概率來解釋一些物理規律吧。你們都知道有條「波義耳定律」（Boyle's Law）吧？它說：在一定的溫度底下，氣體的壓力和它的體積成反比。如果我們把氣體想像成為一大堆氣體分子在容器裏隨意地運動，運動速度受溫度影響。如果氣體分子數目不變，溫度也不變，但容器體積卻減少一半，那麼不難想像每粒氣體分子撞容器壁的概率將要大了一倍，所以撞容器壁的氣體分子數目也大了一倍，壓力自然也就大了一倍。

概率論會否「英雄無用武之地」？

你們可能會問，偶然現象的存在，是不是由於我們的知識不充分？例如假定我們掌握全部關於氣象的資料，也掌握全部關於氣象變化的規律，那麼我們豈不是應該可以準確不訛地預測明天的天氣嗎？於是，明天的天氣如何，便不再是偶然現象了。沒有錯，隨着人類知識的增長，某些偶然現象會轉化為必然現象，歷史上有過不少這種例子。古時人類對月蝕一無所知，月蝕會否在明晚發生，對他們來說是個偶然事件，連帶月蝕也因而蒙上神秘的色彩。隨着天文學的發展，人們瞭解行星如何循軌道運行，明白了月蝕的成因，並且能夠準確地預知月蝕發生的日期時間，於是月蝕的發生與否，便變為必然現象了。

你們會追問下去，然則會不會有一天人類知識達到極峯，於是任何偶然現象都轉化為必然現象呢？到了那一天，概率論豈非「英雄無用武之地」嗎？要回答這問題，最好先看看科學史上的一些例子。

自從牛頓（Newton）在 17 世紀中利用著名的三大定律和萬有引力定律，加上微積分，成功地解釋了物體運動的一些現象後，物理學有迅猛的發展。到了 19 世紀後期，不論是力學、

光學、聲學、電磁學，都具備了完整的理論。有些物理學家甚至以為物理學的發展已抵盡頭，人類已經掌握了所有的事物規律！然而這只不過是暴風雨前夕的寧靜，近代物理學的革命狂飆，終於在 20 世紀初爆發了。愛因斯坦（Einstein）發表了特殊相對論，普朗克（Planck）發表了量子學說，接着的二三十年，物理學重新獲得飛躍發展，而且有簇新的研究方向。這個例子，說明了知識是沒有上限的，人類的認識能力是無窮盡的，每多認識一層，也就揭露了深入一層的疑惑。

人類知識的累積，不只越來越深刻，而且研究對象也越來越廣泛。17 世紀以來，自然科學（諸如物理學、化學、生物學、地質學）發展迅速，內容日新月異，而科學研究方法，也逐漸滲透至其他學科去。到了 20 世紀，經濟學、心理學、社會學、政治學等領域的研究，也越來越科學化了，因而這些學科漸漸被稱為社會科學。對於很多社會現象，我們還未能掌握它們的變化規律，所以在社會科學裏，偶然現象遠較必然現象為多，可以預見概率論這件用來研究偶然現象的數學工具，在社會科學上的應用，正方興未艾。

以上我們指出概率論不會「英雄無用武之地」的一個原因，就是我們無法掌握事物發展的所有規律。但還有另一個原因，就是我們無法掌握有關事物的所有資料。沒有足夠的資料，即使我們知道變化規律，也無從預測未來的發展。就以拋擲錢幣為例，理論上如果我們知道錢幣的形狀、大小、重量，錢幣落地時的速度、角度，地面的彈性，……，是可以預知它着地時那一面翻上，抑或它站在邊上！但由於影響因素太多（上面只列舉了其中一部分而已），我們無法掌握全部資料。儘管我們清楚瞭解物體運動的規律，也無從預知錢幣着地時的命運，於是只好把它列為偶然現象了。再舉一個例子，如果你是個有計劃的人，規定逢碰到口袋裏少於若干元便去銀行提款，那麼你當然知道自己明天會不會去銀行提款。假定全香港的每一個居

民都是這樣有計劃，每一個人都知道自己明天會不會去銀行提款。但對管理銀行的人來說，由於他們手頭上沒有全部居民的有關資料，只好把明天有多少人來提款這回事，看成是一個偶然現象了。

下面我們再舉幾個例子來說明「大數定律」的觀點。

例一：誰是作者？

每位作家的著作，必然流露自己的風格。反映這種風格的一個特色，就是用句的長度。有些統計學家曾經把某些名作家的著作裏面所用的句子，按長度做了一項統計。下面是培根（Bacon）的論文集裏用句長度的統計數字（見表 1.5）。先把

字數	句數			字數	句數	
	前半部	後半部			前半部	後半部
1 -5	1	2		121-125	3	4
6-10	8	8		126-130	2	3
11-15	24	25		131-135	2	1
16-20	22	23		136-140	1	2
21-25	46	53		141-145	3	2
26-30	43	42		146-150	-	1
31-35	57	55		151-155	1	2
36-40	38	37		-	-	-
41-45	24	38		166-170	-	1
46-50	31	25		-	-	-
51-55	23	28		189-190	1	-
56-60	25	21		191-195	-	-
61-65	19	17		196-200	1	-
66-70	12	13		-	-	-
71-75	19	8		211 -215	1	-
76-80	7	11		-	-	-
81-85	12	11		226-230	-	1
86-90	6	7		231-235	-	1
91-95	6	9		-	-	-
96-100	2	11		311-315	-	1
101-105	7	3		總數	462	474
106-110	9	3				
111-115	4	1				
116-120	2	4				

表 1.5

培根的論文集分成前半部和後半部，把前半部 462 個句子按長短分類，例如有 1 句用了 1 至 5 個字、有 8 句用了 6 至 10 個字、餘此類推；再以相同方法，把後半部 474 個句子按長短分類。從表 1.5 見到，不論是前半部或後半部，句子長短的分佈，很是類似，或者可以這樣說，這分佈反映了培根的寫作風格。如果隨意抽一個句子，事前我們無法預知這個句子的長度，但總的來說，句子長短的分佈卻是穩定的。從表 1.5 的統計數字中，可以算出培根用句的平均長度，在前半部是 48.4，在後半部是 48.5。你看，這個平均長度不是很穩定嗎？

下面是另一位作家麥考萊（Macaulay）的用句長度的統計數字（見表 1.6），也是以相同的方法得到的。從表 1.6 見到，麥考萊用句長短，也有他的特色。比起培根，他喜歡用較短的句子。從表 1.6 的統計數字中，可以算出麥考萊用句的平均長度，在前半部是 22.8，在後半部是 21.4。

字數	句數			字數	句數	
	前半部	後半部			前半部	後半部
1-5	26	20		71-75	4	-
6-10	100	104		76-80	4	4
11-15	126	126		81-85	2	-
16-20	89	111		86-90	2	-
21-25	82	104		91-95	-	1
26-30	51	57		96-100	1	1
31-35	26	35		101-105	1	-
36-40	29	39		106-110	-	-
41-45	16	22		111-115	1	-
46-50	10	14		116-120	-	-
51-55	12	8		121-125	1	-
56-60	9	3				
61-65	7	1		總數	601	650
66-70	2	-				

表 1.6

假如有一部著作，我們不能肯定作者是甲抑或是乙，有什麼辦法決定誰是作者呢？一個辦法，是把這部佚名著作裏面的

用句長度統計一下。如果用句長度的分佈接近甲的用句長度分佈，我們便較相信那是甲的著作；如果用句長度的分佈接近乙的用句長度分佈，我們便較相信那是乙的著作。當然，這個方法是頗粗糙，而且也不能就此決定誰是真正的作者，但對於考證某些文學著作的作者是誰，還是可以發揮相當大的作用。

例二：福爾摩斯的偵探術

你們大概都認識福爾摩斯（Sherlock Holmes）吧？他是柯南道爾爵士（Sir Arthur Conan Doyle）筆下的傳奇人物，為人智勇雙全，兼且觀察入微，推理精密。看來這位鼎鼎大名的私家偵探，還懂得「大數定律」呢！ 在「跳舞人歷險記」（The Adventure Of The Dancing Men）這樁案件裏，福爾摩斯發現以下一段以密碼寫成的信息（見圖 1.7）。明顯地，每一個手舞足

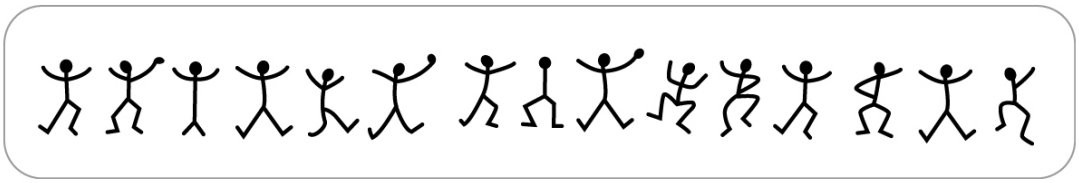

圖 1.7

蹈的小人代表了一個英文字母。他還推測，旗號代表一個字的結束。以上的信息共有 4 個字，頭一個字有 2 個字母，第二個字有 4 個字母，第三個字有 3 個字母，第四個字有 5 個字母，共計有 15 個字母。怎樣破解這段以密碼寫成的信息呢？福爾摩斯真是聰明，他發覺在那 15 個小人中，其中一個（左面數起第 4 個）出現凡四次之多。用數學化的語言說，就是它代表的字母出現的相對頻率是 $^{4}/_{15}$。在英文字母中，字母 E 最常出現，用概率論的語言說，就是使用 E 的概率最大。既然那小人代表的字母出現的相對頻率是這樣高，很可能它就代表了字母 E。不久，福爾摩斯又發現另一段以密碼寫成的信息（見圖 1.8）。如果對前一段密碼信息的分析是正確的話，這段信息的第一個

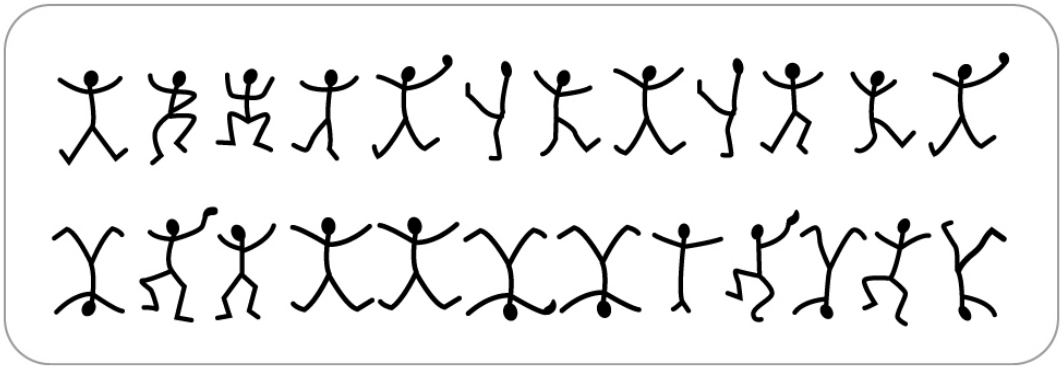

圖 1.8

字便是 E－－－E 了。剛好這段信息是寫給一位名叫 ELSIE 的婦人，於是福爾摩斯便猜測第二、三、四個小人分別代表字母 L、S、I 了。後來他又發現更多以密碼寫成的信息，用相似的推理，互相印證，便不難把前兩段信息譯出來，原來第一段信息是說：AM HERE ABE SLANEY，第二段信息是說：ELSIE PREPARE TO MEET THY GOD，是壞蛋 ABE SLANEY 對 ELSIE 發的恐嚇信。福爾摩斯解通密碼後，活學活用，以同樣的密碼寫了一段信息，把 ABE SLANEY 引了出來，繩之於法！

例三：人造的偶然現象

你們都聽過電視台的收視率調查吧？你們心裏會不會產生以下的疑問：電視台發表某節目有若干萬名觀眾，他們又沒有來訪問我，怎麼知道我有沒有觀看那個節目呢？沒有錯，負責調查收視率的機構，大都只訪問 1000 戶左右（以全港 100 萬戶計，平均每 1000 戶才有一戶接受訪問而已），但根據這 1000 戶的答覆，便可以估計真正的收視人數。個中道理，又是「大數定律」。

假定全港 100 萬戶中有 x 萬戶觀看那個節目，在 100 萬戶中隨意抽一戶，那一戶觀看該節目的概率是 $x／100$ 。隨意抽一戶，是個人造的偶然事件。負責調查收視率的機構，把這個人造的偶然事件重複 1000 次，即是隨意抽 1000 戶。如果其中

有 600 戶觀看該節目的話，相對頻率便是 600／1000 了。根據「大數定律」，600／1000 與 x／100 通常是很接近的，即是 x 通常很接近 60，於是估計全港共有 60 萬戶觀看該節目。要是知道每戶平均有多少人，便可以進一步估計全港有多少人觀看該節目了。當然，真正使用的方法，比較以上的描述來得更複雜，但基本思想就是「大數定律」的應用。

抽樣調查是一個重要的調查研究方法，它人為地製造一個具有某概率的偶然事件，從收集得來的樣本數據中，利用概率論來估計整體的狀況。在上面的例子裏，由於樣本中有六成的收視戶，便估計整體有 60 萬收視戶。從樣本數據推斷整體狀況，就是統計推斷學（Statistical Inference）的主要任務了。抽樣調查在質量控制（Quality Control）中也很重要，為了知道產品的質量，工廠的質量控制部門在製成品中抽一小部分來檢定它們是否合格。這小部分產品就是樣本，由樣本的質量，可以推斷出全部產品質量的狀況。

例四：湖中游魚知多少？

如果你在地理課本裏讀到：「╳╳湖總面積為╳╳╳公頃，盛產淡水魚，估計湖裏魚的總數，達╳╳萬尾之多。」你會不會懷疑：怎樣去數數湖裏有多少尾魚呢？

統計學家是用「捉、放、捉」（Capture-Recapture）這個方法作出這樣的估計。首先，捕捉一定數量（$= n$）的魚，在它們身上塗上記號，然後放回湖中。過了一段時候，再捕捉一定數量（$= m$）的魚，看看其中有多少（$= x$）尾魚是塗有記號的。由此，便可以估計湖中游魚的數目（$= N$）了。經過第一次捉放後，N 尾魚中有 n 尾塗上記號。第二次捉魚，可看作是隨意抽 m 尾魚。隨意抽一尾魚，發覺它是塗有記號，這個偶然事件的概率是 n／N 。重複這個偶然事件 m 次，即是隨意抽 m 尾魚，抽的魚塗有記號的相對頻率是 x／m。跟據「大數定律」，

$n／N$ 與 $x／m$ 通常是很接近的，所以我們便估計 N 是個很接近 $mn／x$ 的數了。譬如第一次捉 2000 尾魚，放了後又捉 4000 尾，其中 20 尾是有記號的，那麼 N 便大約是

$$2000 \times 4000／20 = 400,000$$

我們也可以用「捉、放、捉」這方法來估計一份稿件裏面有多少錯字（$= N$）。甲、乙兩人分別校稿一遍，假定甲發現 n 個錯字，乙發現 m 個錯字，其中 x 個是甲也發現的。比對一下湖中游魚的例子，錯字相當於魚，甲找出的錯字相當於第一次捉的魚，加以記號。乙找出的錯字相當於第二次捉的魚，其中那 x 個錯字相當於有記號的魚。從數學眼光看，這兩個貌似「風馬牛不相及」的問題是「似二而實為一」，所以錯字總數的估計公式也是 $N \approx mn／x$ 。

法國數學家拉普拉斯（Laplace）在 19 出紀初期也利用「捉、放、捉」這方法的「變着」來估計法國人口總數。拉普拉斯是一位著名的數學家，他對數學作出不少重要貢獻，其中之一就是把概率論成功地應用到人口學的問題上。在 1802 年 9 月 23 日，在法國的 30 個地區作了人口普查，統計人口總數為 2,037,615 人。但還有別的地區沒有進行人口普查，如何估計全國的人口總數呢？ 根據普查的資料顯示，在普查的 30 個地區內，在 1800、1801、1802 三年內共有 215,599 名嬰兒誕生，而由全國的資料可知全國（包括普查的 30 個地區以外的地區）在 1802 年共有約 1,000,000 名嬰兒誕生。於是拉普拉斯估計全國人口是

$$2,037,615 \times 3 \times 1,000,000／215,599 \approx 28,352,844。$$

請你想一想，為什麼拉普拉斯的方法是類似湖中游魚知多少的方法呢？

例五：怎樣用概率估計面積？

你們看見這個題目，會感到詫異嗎？概率論是研究偶然現象的學問，給定一圖形，它的面積卻是確定的，又何來偶然性呢？

設有一不自相交的封閉曲線，S 是它所圍成的面積。讓我們作一正方形，把曲線包在裏面（見圖 1.9），正方形的面積是 A。

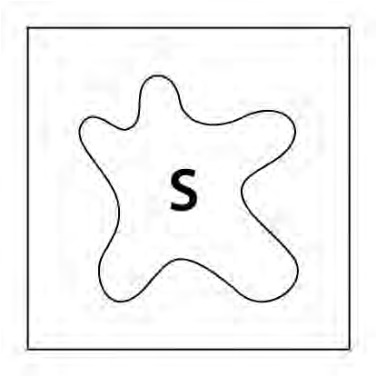

圖 1.9

如果我們有辦法在正方形內隨意抽一點，這點會否落在封閉曲線之內，是個偶然事件。概率是 $S／A$。假定隨意在正方形內抽 N 點，發現其中 M 點落在圖形內，那麼點落在圖形內的相對頻率是 $M／N$。根據「大數定律」，當 N 是足夠大時，通常 $S／A$ 很接近 $M／N$，所以可把 $MA／N$ 作為 S 的近似值。

上面的辦法，涉及一個技術上的問題，就是如何隨意地在正方形內取點？ 要是胡亂取一點，說不定有人比較偏向取右面的點，有人偏向取中間的點。要無偏袒地取點，即是任何一點都有均等機會被選中，是不容易的。要解決這個問題，可以借助隨機數表（見圖 1.10）。隨機數表是一串由 0 至 9 的數，理論

1	6	8	0	4	5
3	6	0	7	5	1
3	8	5	8	5	9
1	0	1	4	2	1

圖 1.10

上它們是隨意地抽出來，實際上我們通常使用某些方法去得出這串貌似隨意地抽出來的數，使它們符合統計學上稱為「隨機性質」（Randomness）的界說，故亦稱為「偽隨機數」（Pseudo-random Number）。有了這串隨機數，便可以在正方形內隨意地取點了。為了簡化說明，設正方形的邊長為 1，它的四個端點的座標是（0, 0），（0, 1），（1, 0）和（1, 1）。正方形內的一點，由橫座標 x 和縱座標 y 決定。從隨機數表中取頭六個數，比方是 1 , 6 , 8 , 0 , 4 , 5。頭三個數字加上小數點，得 $x = 0.168$。後三個數數字加上小數點，得 $y = 0.045$。x 和 y 決定正方形內一點，在這個例子裏，便是（0.168, 0.045）。由於表內的數是隨意的，這一點也可以看作是隨意選的。

以上的例子，有一個特點。當碰着一個數學分析上的問題，我們不直接求解，卻模擬一個適當的隨機過程，利用它的概率特徵的統計估計值來作為原來問題的近似解。這種方法是在四十年代初期由數學家馮諾伊曼（von Neumann）和烏倫（Ulam）提出的，叫做「蒙地卡羅法」（Monte Carlo Method）。在這一章開首提到的蒲豐拋針實驗，其實就是這種方法的（最早）運用呢！

第二章

讓我們來數一數

明白了什麼叫做偶然事件和偶然事件的概率之後，讓我們先來看一類最簡單的情形，那就是當可能發生的結果只有有限多個，而且每一個結果在客觀上都以同樣可能性發生。舉一個例子，為了控制質量，工廠的產品出廠時都要進行檢查，但產量很大時，逐件檢查便要耗費大量的人力和時間，而且有些產品一經檢查後就不能再使用了，那怎麼辦呢？一個辦法是隨意地抽取一部份產品來檢查。假如我們以 1 號、2 號、3 號等等代表產品，那麼每一個抽樣可以用一組數字來代表。為簡化敘述，假定只有 5 件產品，從中抽取 2 件。這個抽樣法，共有多少個可能的結果呢？答案是 10 個，可以表為

{1, 2}，{1, 3}，{1, 4}，{1, 5}，{2, 3}，

{2, 4}，{2, 5}，{3, 4}，{3, 5}，{4, 5}。

因為在 5 件中隨意地抽 2 件，這 10 個結果以同樣可能性發生。

假設產品 1 號和 2 號是不及格的，而產品 3 號、4 號和 5 號是合格的（當然，在實際情況底下，我們事前是不知道那些產品合格，那些產品不合格。怎樣制定抽樣的方案以便有效地控制質量，那就是概率論在實際問題上的一個應用了）。那麼「抽中至少一個不合格產品」這個事件是由

{1, 2}，{1, 3}，{1, 4}，{1, 5}，{2, 3}，{2, 4}，{2, 5}

這些結果構成，由於這事件佔了 10 個結果當中的 7 個，而那 10 個結果發生的機會是均等，所以自然地「抽中至少一個不合格產品」這個事件發生的概率是 $^{7}/_{10}$。再舉一個例子，「抽中兩個都是不合格產品」這個事件是由 { 1, 2 } 構成，所以這事件只佔了 10 個結果當中的一個，它發生的概率就是 $^{1}/_{10}$。

普遍地說，如果共有 N 個可能結果，而且假設每個結果發

生的機會均等，如果事件 A（以後為簡便起見，偶然事件一律叫做事件，而且以大草英文字母代表）是由 N 個結果當中的 M 個構成，那麼我們說 $M／N$ 是事件 A 的概率，記作 P(A)。用這個方法來定義概率，就是所謂概率的古典定義（Classical Definition of Probability）。它顯然有很大的局限性，在第三章和第四章裏我們將會把它推廣到更一般的情形。暫時，請讀者憑直覺接受這樣的定義吧。

如果只有有限個結果，而且它們都以同樣可能性發生，計算事件 A 的概率變成是數數有多少個結果的問題。再舉一個例子來說明這一點吧。在袋裏放進兩個黑球和一個白球，然後隨意地抽一個，問抽着白球的概率是多少？如果把三個球都標上號碼，黑球是 1 號和 2 號，白球是 3 號，那麼抽着的球是 1 號或者是 2 號或者是 3 號都有同樣的可能性。其中只有抽着 3 號球才構成「抽着白球」這個事件，所以它的概率是 $^1/_3$。再複雜一點，先抽一個球，看看是什麼顏色，然後放回去，再抽一個球，又看看是什麼顏色。問「第一次抽着白球和第二次抽着黑球」這個事件的概率是多少？我們用一對數偶（a, b）表示兩次抽球的結果，a 代表第一次抽着的球的號碼，b 代表第二次抽着的球的號碼，於是共有 9 個以同樣可能性發生的結果，即是

（1, 1），（1, 2），（1, 3），（2, 1），（2, 2），

（2, 3），（3, 1），（3, 2），（3, 3），

其中（3, 1）和（3, 2）這兩個結果構成考慮中的事件，所以它的概率是 $^2/_9$。假如我們換一個方式抽球，抽了第一個球後不把它放回去，接着抽第二個球，問「第一次抽着白球和第二次抽着黑球」這個事件的概率是多少？答案是否仍然是 $^2/_9$ 呢？這次只有 6 個以同樣可能性發生的結果，即是

（1, 2），（1, 3），（2, 1），（2, 3），（3, 1），（3, 2），

其中（3, 1）和（3, 2）這兩個結果構成考慮中的事件，所以它

的概率是 $^1/_3$。

下面我們再舉六個有趣的例子。為了便利不懂得排列和組合（Permutation and Combination）公式的讀者也能夠捕捉到中心思想，我們盡量以簡單的數據來說明問題。不過，碰到更複雜的情形或者要討論普遍情況，不方便或者不能夠把一切可能的結果逐一臚列了，到了那時，便避不開排列和組合公式。我們把這方面的討論收在一起，成為這章的附錄，以供參考，但即使略去不看也不致影響對其他章節的了解。

例一：第二高手何時得亞軍？

在乒乓球單淘汰賽中，共有 8 人參加。王乙的球技排行第二，假設比賽純粹講求技術，技高者必勝，那麼王乙得到亞軍的機會是多少呢？這問題乍看去有點不對勁，既無運氣可言，而王乙又是第二高手，那麼亞軍自是非他莫屬，又有什麼好計算呢？且慢，比賽是採用單淘汰，憑抽簽決定誰跟誰捉對兒廝殺。要是王乙出師不久便碰第一高手李甲，豈不是馬上便給淘汰出局，還拿什麼亞軍呢？所以王乙能否得亞軍，還是要看抽簽結果，那不就要服從概率的計算嗎？抽簽後各人的比賽晉級情況可由下圖表示（見圖 2.1）。

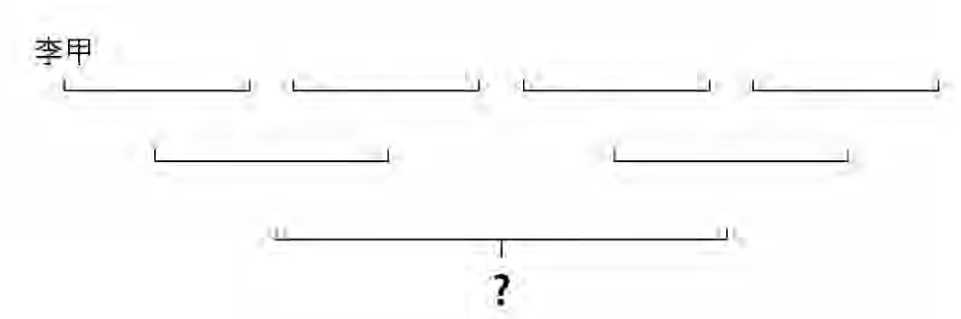

圖 2.1

不妨假定李甲是在最左面的位置上，那麼王乙可能在另外那 7 個位置上出現，而且以同樣可能性出現於任何一個位置上。要得亞軍，王乙只能在（從左面數起）第五位、第六位、第七位或者第八位出現，即是說只有 4 個位置對王乙取得亞軍是有利

的，所以王乙拿得亞軍的概率是 $^4/_7$。在很多球類比賽裏，球隊被分成若干組，每組有一隊出線，然後由各組的出線隊伍爭奪冠軍。在分組時通常把種籽球隊分放在不同的組裏，目的之一也是要增加第二高手得亞軍的可能性。

例二：粉紅花的下一代

孟德爾（Mendel）是十九世紀的一位生物學家。他在遺傳學上的研究成果，在他有生之年一直未被重視，直到他逝世十六年後，這些成果才在 1900 年被人重新發現。後來孟德爾被公認為遺傳學的鼻祖，他的遺傳學理論，成功地解釋了很多遺傳現象，而概率論的運用，是他的理論中一個不可缺少的組成部份。孟德爾認為，生物某些性狀遺傳給下一代，主要是通過細胞內的遺傳因子。生物的生殖細胞內，有很多對遺傳因子，每一對遺傳因子是生物某些性狀的決定因素。在交配的時候，雄性的一對遺傳因子當中一個和雌性的一對遺傳因子當中一個隨意組合，構成下一代的一對遺傳因子。所以，下一代的遺傳因子，便有不同的配搭，表現出不同的性狀。讓我們用哥倫氏（Correns）的實驗來說明遺傳理論怎樣倚靠概率的計算。

哥倫氏是重新發現孟德爾研究成果的科學家之一。在一個實驗裏，他把一株開紅花的植物和一株同種類但開白花的植物交配，發現它們產生下一代，開的花都是粉紅色的。根據孟德爾的解釋，紅色的一對遺傳因子，都是「紅」因子，用 RR 代表，而白花的一對遺傳因子，都是「白」因子，用 WW 代表。當它們交配後，下一代的一對因子，必然是 RW，所以第二代是一個新品種，開的花是粉紅色的（見圖 2.2(a)）。如果哥倫氏的實驗就到此為止，便用不着概率的計算了。但他繼續把第二代的新品種互相交配，看看產生什麼的結果。如果孟德爾的理論是正確，這樣交配，會產生以下的結果（見圖 2.2(b)）。在圖中看到，第三代的植物，可以開紅花、白花或粉紅花。由於遺傳因子的配搭共有 4 個可能的結果，每個結果以同樣可能

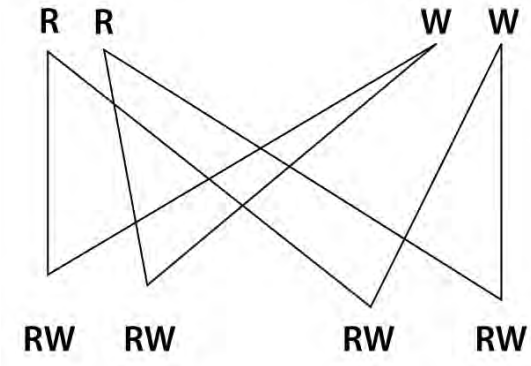

圖 2.2(a)

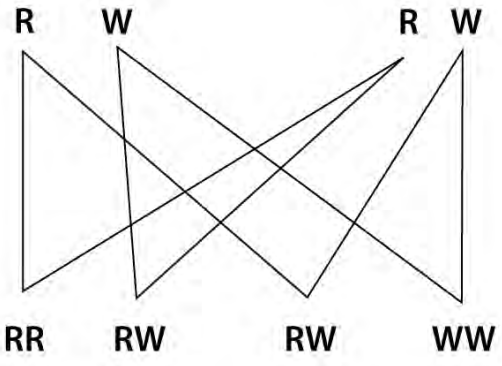

圖 2.2(b)

性發生，所以每個可能的結果的概率是 $^1/_4$。4 個結果中有 2 個的遺傳因子對是 RW，是粉紅花的特徵，所以把粉紅花和粉紅花交配，下一代開粉紅花的概率是 $^1/_2$。同樣理由，開紅花的概率是 $^1/_4$，開白花的概率是 $^1/_4$。事實上，哥倫氏的實驗，共有 565 株第三代的植物，其中 141 株開紅花，292 株開粉紅花，132 株開白花。實驗得出來的比例是 141:292:132，這跟基於孟德爾理論由概率計算得到的 1:2:1，不是很接近嗎？

例三：殿後是否一定吃虧？

在三件工具中，有兩件是沒損壞的。三人依次隨意地取一件使用。如果每人使用完畢後把工具放回去才輪到下一個人取的話，那麼顯然每人都有 $^2/_3$ 的機會拿着沒損壞的工具，殿後者或先行者也沒有分別。但如果每人取了工具便離去，接着下一個人從剩下來的工具中取一件，那麼殿後者會不會吃虧呢？他拿着沒損壞的工具的概率會不會減少呢？

讓我們把工具分別標上號碼，1 號、2 號和 3 號，而且假設 1 號和 2 號沒損壞，3 號是損壞的工具。抽取工具的先後次序情況，不外是 6 個可能的結果，以（1, 2, 3），（1, 3, 2），（2, 1, 3），（2, 3, 1），（3, 1, 2），（3, 2, 1）代表。例如（1, 2, 3）表示第一位取第 1 號工具，接着第二位取第 2 號工具，最後一位取 3 第號工具，其餘類推。其中（2, 3, 1）和（3, 2, 1）這兩個結果都以 1 押尾，表示殿後者拿着好工具 1 號。還有（1, 3, 2）

和（3, 1, 2）這兩個結果都以 2 押尾，表示殿後者拿着好工具 2 號。就只有（1, 2, 3）和（2, 1, 3）這兩個結果以 3 押尾，表示殿後者拿着損壞的工具。所以「殿後者拿着沒損壞工具」這個事件，是由 6 個以同樣可能性發生的結果當中的 4 個構成，它的概率是 $^4/_6 = {}^2/_3$，並沒有比其他人吃虧。其實，每人拿着沒損壞的工具的概率也是 $^2/_3$。

如果你懂得排列和組合，不妨按照上述的基本思想討論 N 件工具中有 M 件沒損壞的情況，你會發現，第 n 個人拿着沒損壞的工具的概率是 $M／N$，與 n 是無關的。

例四：「羅宋輪盤」的概率

大家有沒有看過《獵鹿者》（Deer Hunter）這套電影呢？如果有的話，對於電影裏面那殘忍的「羅宋輪盤」（Russian Roulette）一定印象猶深吧？《獵鹿者》是一部反戰電影，所以在描述戰俘受到不人道的待遇時，特別渲染，以收反戰之效。其中一個玩弄戰俘的辦法，是在手槍的彈膛隨意放入一枚子彈（彈膛共有 6 個放子彈的洞），然後命令兩名戰俘用那支手槍輪流向自己的頭部發射，直到其中一名中槍死掉，另一名戰俘才倖免於難。

撇開這個「遊戲」的不人道和殘忍成分這點，我們可以計算一下戰俘死掉的概率。假設戰俘甲被命令先向自己發射，如果甲沒死掉便輪到乙向自己發射，如果乙沒死掉便又輪到甲，如此週而復始。表面看來，甲是吃虧的，但只要細心計算一下，便知道每人會死掉的概率其實相同。因為子彈在彈膛裏只有 6 個可能的結果，記作 1、2、3、4、5、6，其中 1 表示子彈放在第一個洞，2 表示子彈放在第二個洞，其餘類推。在 1、3、5 這三個結果中，甲死掉；在 2、4、6 這三個結果中乙死掉，所以甲死掉的概率和乙死掉的概率相同，都是 $^3/_6 = {}^1/_2$。

假如虐待戰俘的殺手換一個方式，在彈膛裏隨意放兩枚子

彈，情形便不同了。這一次可能的結果共有 15 個，可以表示為：

（1, 2），（1, 3），（1, 4），（1, 5），（1, 6），
（2, 3），（2, 4），（2, 5），（2, 6），（3, 4），
（3, 5），（3, 6），（4, 5），（4, 6），（5, 6），

其中（1, 2）表示兩枚子彈放在第一個洞和第二個洞，其餘類推。使甲死掉的結果是（1, 2），（1, 3），（1, 4），（1, 5），（1, 6），（3, 4），（3, 5），（3, 6），（5, 6），即是 15 個結果當中的 9 個，所以甲死掉的概率是 $^{9}/_{15} = {}^{3}/_{5}$ 。這比 $^{1}/_{2}$ 大一點，所以在這個情形底下，先向自己發射的戰俘是吃虧的！

例五：糊塗秘書亂點鴛鴦譜

有位糊塗秘書，看也不看便把三封信放進三個寫好了地址的信封裏，有些信給放進了地址不相符的信封，有些信給放進了地址相符的信封。你猜猜全部信沒一封給放進地址相符的信封的概率是多少？以 1 代表第一封信，2 代表第二封信，3 代表第三封信。和 1 相符的信封叫第一封，和 2 相符的信封叫第二封，和 3 相符的信封叫第三封。如果 1 給放進第二個信封，2 給放進第三個信封，3 給放進第一個信封，我們便用（3, 1, 2）來代表這情況，其餘類推。這樣的數組共有 6 個，那是

（1, 2, 3），（1, 3, 2），（2, 1, 3），
（2, 3, 1），（3, 1, 2），（3, 2, 1）。

由於糊塗秘書把信隨意地放進信封，這 6 個結果以同樣可能性發生。在這 6 個結果當中，有多少個是把次序完全調亂的呢？即是 1 不在第一個位置出現，2 不在第二個位置出現，3 不在第三個位置出現。答案是只有兩個，就是（3, 1, 2）和（2, 3, 1），所以我們要計算的概率是 $^{2}/_{6} = 0.333\ldots\ldots$。

用比較深刻的數數方法，我們可以證明當秘書把 N 封信隨意地放進 N 個信封，在 $N!$ 個可能的結果當中，有

$N!\,(1 - {}^{1}/_{1!} + {}^{1}/_{2!} - {}^{1}/_{3!} + \ldots + (-1)^{N}\,{}^{1}/_{N!})$

個結果構成「沒有一封信和信封相符」這個事件，所以它的概率是 $P(N) = 1 - {}^{1}/_{1!} + {}^{1}/_{2!} - {}^{1}/_{3!} + \ldots + (-1)^{N}\,{}^{1}/_{N!}$。你在式裏見到的「！」不是感嘆號，而是一個數學符號，N！是由 1 乘到 N 的簡寫，叫做階乘（Factorial），例如 $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$。利用高等數學的知識，還可以知道當 N 是足夠大時，$P(N)$的數值非常接近 ${}^{1}/_{e} = 0.367879445\ldots\ldots$。這裏的 e 是個在數學上經常出現的常數，叫做自然對數的底（Base of Natural Logarithm），它的數值是 2.71828……。有趣的事情是只要 N 並不太小，$P(N)$已經很接近 ${}^{1}/_{e}$，請看一些計算結果（見表 2.3）。舉一個例子，

N	$P(N)$
1	0
2	0.5
3	0.3333…
4	0.3750…
5	0.3666…
6	0.3680…
7	0.367857142…
8	0.367881944…
9	0.367879188…
10	0.367879464…

表 2.3

無論有 10 封信抑或有 1000 封信，沒一封信給放進地址相符的信封的概率都是幾乎一樣的！

例六：是否同月同日生？

在一個生日宴會上，忽然有人問：「我們當中有沒有人是同一天生日的呢？」你猜答案是「有」的概率是多少？如果宴會上有超過 365 人，答案肯定是「有」（為了簡化敘述，讓我們假設每年只有 365 天，不計閏年），所以不妨假設宴會上有 $N-1$ 個客人（連主人在內，便有 N 個人），而 N 是一個在 2 至 365 之間的整數。

為了解答這個問題，我們把每個人看成是個球，把每一天看成是個袋，a 號球給放進 t 號袋，表示第 a 個人的生日是在第 t 天。於是問題變成：如果把 N 個球隨意地放在 365 個袋，至少有一個袋盛着多於一個球的概率是多少？不如先計算「沒有一個袋盛着多於一個球」這個事件的概率，因為那較為容易。如果把袋和球都標上號碼，那麼把球放在袋共有 365^N 個不同的結果，因為每一個球都有 365 種不同的放法，而且這些結果以同樣可能性發生。如果要沒有一個袋盛着多於一個球，那麼第 1 號球有 365 個放法，第 2 號球不能和第 1 號球放在一起，因此只有 364 個放法，第 3 號球不能和第 1 號球或者第 2 號球放在一起，因此只有 363 個放法，其餘照此類推至第 N 號球。所以「沒有一個袋盛着多於一個球」這個事件是由

$$365\times364\times363\times\ldots\times(365-N+1)$$

個結果構成，它的概率就是

$$365\times364\times363\times\ldots\times(365-N+1)\,／\,365^N$$

$$=\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\ldots\times\frac{365-N+1}{365}\text{。}$$

「至少有兩個人同一天生日」這個事件的概率就是

$$p=1-\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\ldots\times\frac{365-N+1}{365}\text{。}$$

讓我們對一些具體的 N 作一點計算（見表 2.4）。令人詫異的

發現，是只要 N 大於 22，p 已經大於 0.5 了。當 N 達到 40，p 已經非常接近 0.9，即是說只要有 40 人在場，便有近乎九成機會當中有兩人是同一天生日的。憑直觀猜想，大概會以為 N 必須比 40 大得多才是這樣吧？

N	p	r
2	0.0027…	0.0027…
5	0.0271…	0.0109…
10	0.1169…	0.0243…
15	0.2529…	0.0376…
20	0.4114…	…
21	0.4437…	…
22	0.4757…	…
23	0.5037…	…
24	0.5383…	…
25	0.5687…	…
30	0.7063…	0.0764…
40	0.8912…	0.1014…
50	0.9704…	0.1257…
60	0.9941…	0.1494…
70	0.9992…	0.1724…

表 2.4

但如果把問題換成「我們當中有沒有人和主人同一天生日呢？」，答案便完全不同了。因為雖然可能的結果有 365^{N-1} 個（不計主人），構成「沒有人和主人同一天生日」這個事件的結果卻有 364^{N-1} 個（為什麼？請你想一想），所以「至少有一個人和主人同一天生日」這個事件的概率是

$$r = 1 - (364 / 365)^{N-1}。$$

讓我們也對一些具體的 N 作一點計算（見表 2.4），以供比較。請看，即使 N 達到 70，p 已經是 0.9992……，但 r 亦只不過是 0.1724……而已，不是小很多嗎？

附錄：排列和組合

首先讓我們提出排列和組合公式的基本思想。如果有 N_1 種方法做第一件事 A_1，有 N_2 種方法做第二件事 A_2，其餘照此類推，那麼依次做 A_1、A_2、…、A_n 這 n 件事便共有 $N_1N_2\ldots\ldots N_n$ 種方法。例如號碼鎖有 3 個撥盆，每個撥盆上有 0 至 9 這 10 個數字，撥動 3 個撥盆，可以組成 10^3 個不同的三位數字，因為第一個撥盆有 10 個撥法，第二個也有 10 個，第三個也有 10 個，在這 10^3 個數中（000, 001, …, 239, …, 999）選定一個，就是開鎖的號碼。

從 N 個不同的東西取 K 個（K 不大於 N）來排列，共有幾個不同的方法呢？取第一個有 N 種方法，取第二個只有 $N-1$ 種方法，其餘類推。按上述的基本思想，答案是

$N(N-1)\ldots(N-K+1)$，記作 $P(N, K)$。

特別地，$P(N, N) = N(N-1)\times\ldots\times 3\times 2\times 1 = N!$（$N$ 的階乘）。

從 N 個不同的東西取 K 個（K 不大於 N），共有幾個不同的方法呢？按照上述的排列公式，共有 $P(N, K)$個不同的排列；但其中若選定了 K 個東西後的排列，共有 $P(K, K) = K!$個，而這些排列對於怎樣取 K 個東西來說是不用區別的，所以答案是 $P(N, K)／K! = N!／K!(N-K)!$ ，記作 $C(N, K)$。

第三章

怎樣一個數法？

在前一章我們介紹了古典概率的計算方法，相當於數數有多少個可能的結果。要注意一點，以上方法所用的模型基於兩個假設：（1）可能發生的結果只有有限多個。（2）每個結果都以同樣的可能性發生。但是這兩個假設是否合理呢？這就要看實際問題是怎樣了。首先，（1）不一定是對的，可能發生的結果不一定只有有限多個，碰到無限多個結果的情形怎辦呢？我們把這方面的討論留給下一章，在這一章讓我們只看有關（2）的問題。通常，有很多方法羅列所有可能發生的結果，那一種方法才適合（2）呢？要回答這個問題，必須先瞭解面對的實際情況。舉一個例子吧，在前一章我們曾經解釋過，袋裏有兩個黑球和一個白球，隨意地抽一個，抽着白球的概率是 $1/3$。但如果我們這樣推論：抽着的球，非黑即白，所以可能的結果只有兩個，假設它們以同樣可能性發生，答案豈不是 $1/2$ 嗎？事實上，當我們抽球的時候，並不是在黑球白球中隨意選一，而是在三個球中隨意選一，所以假設（2）對抽着那一個球來說是合理的，但對抽着什麼顏色的球來說就不合理了。你們可能嫌以上的例子太簡單，但如果你明白了，便不會像 18 世紀法國數學家達朗貝爾（d’Alembert）那樣受困擾了（見例一）！

例一：達朗貝爾的困惑

在 1754 年達朗貝爾提出一個簡單的概率問題：把一枚錢幣連擲兩次，其中至少有一次出現人像的概率是多少？達朗貝爾認為這個偶然現象有三個可能的結果：（I）第一次擲得人像，（II）第一次沒有擲得人像，第二次才擲得人像，（III）兩次都沒有擲得人像。由於只有三個可能結果，於是每個結果

的概率是 $^1/_3$，其中在（I）和（II）都出現人像，所以至少出現一次人像的概率是 $^2/_3$。這個答案是錯誤的，因為當中誤用了機會均等的假設。事實上，（I）只要求第一次擲得人像，而沒有理會第二次擲得什麼，（II）和（III）卻指定了兩次擲得什麼，說（I）、（II）、（III）機會均等，是不合理的。

按照古典概率的計算方法，我們用 H 代表擲得人像，用 T 代表擲得另一面，於是連擲兩次便有四個可能的結果，即是 HH，HT，TH，TT。由於四者出現的機會均等，而「至少出現一次人像」這個事件由前三個結果組成，所以答案應該是 $^3/_4$。達朗貝爾提出這個問題，是由於他對古典概率模型有所懷疑。他認為既然古典概率模型用了機會均等的假設，為什麼對（I）、（II）、（III）這三個可能結果又不能用這個假設呢？但兩種計算卻得出不同的答案！

達朗貝爾的問題，提得非常合理。通過討論這個問題，數學家認識到不能濫用等可能性這個假設。而且這只是個假設而已，是否適合還得通過實踐的驗證。我們信任古典概率模型給出的答案，主要是我們認為 HH、HT、TH、TT 這四個結果機會均等，而這個假設又符合實驗的結果。

例二：小食店的座位

學校的小食店裏，擺設了一些小方桌。當兩人坐下時，可以是：（I）面對面坐，（II）坐在一角的兩旁（見圖 3.1）。如

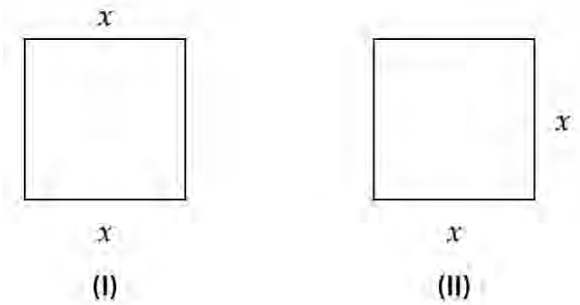

圖 3.1

果我們假設（I）和（II）以同樣可能性發生，那麼兩人相對而

坐的概率便是 $^1/_2$ 了。讓我們看看另一個計算方法，這次不是考慮兩人坐下時的相對位置，而是考慮兩人坐下時的實際方位，於是共有種 6 坐法（見圖 3.2），分別記作（A）、（B）、（C）、

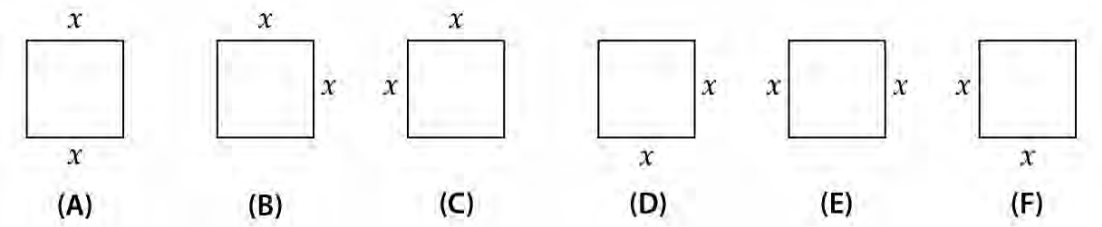

圖 3.2

（D）、（E）、（F）。如果假設六者機會均等，而六者當中只有（A）和（E）是兩人相對而坐，所以相對而坐的概率是 $^2/_6 = {}^1/_3$。

這兩個概率模型，那一個比較合理呢？假設兩人隨意地坐下，並沒有什麼偏好，那麼第二個模型是合理的，所以答案應該是 $^1/_3$。我們也可以這樣想：不妨先假設甲先坐下，然後乙再隨意選擇他的坐位。無論甲坐在那裏，在剩下來的三個位置中，只有一個是在甲的對面。因為乙是隨意地坐，他坐在那三個位置中任何一個都是同樣可能，所以他和甲相對而坐的概率是 $^1/_3$。

還要注意一點，以上的計算中，我們假設兩人隨意地坐。這個假設在實際情況底下卻不一定合理。例如有些心理學家認為，當兩人準備談天時，他們會對角而坐（因為距離比較近），但當兩人不準備談天時，他們會對面而坐（因為距離比較遠）。要是這樣，對面而坐的概率，便決定於來小食店的人，談天居多呢？抑或靜坐居多呢？譬如兩人來小食店，有六成是準備談天而只有四成是準備靜坐的話，那麼兩人對面而坐的概率便是 $^4/_{10} = {}^2/_5$。在這種情況下，古典概率模型的等可能性假設便不適用了。

例三：一個物理學上的應用

如果把兩個球放在三個可分辨的袋裏（譬如每個袋標上號碼），有多少個可能的情形呢？要回答這問題，必須先弄清楚客觀情況：例如每個袋可以不可以盛多於一個球？又兩個球可以不可以分辨出來？為清楚起見，讓我們把幾種不同的情況用圖表列出來（見圖 3.3）。圖（A）是球可分辨的情況，兩個球

(A)

	袋 1	袋 2	袋 3		
1	1	2		(A1)	(A2)
2	2	1			
3		1	2		
4		2	1		
5	1		2		
6	2		1		
7	1,2				
8		1,2			
9			1,2		

(B)

	袋 1	袋 2	袋 3		
1	*	*		(B1)	(B2)
2		*	*		
3	*		*		
4	*,*				
5		*,*			
6			*,*		

圖 3.3

分別記作球 1 和球 2。圖（A）的第一個可能結果就是把球 1 放在袋 1，把球 2 放在袋 2，餘此類推。如果每個袋最多只能盛一球，便只有 6 個可能結果，讓我們記作（A1）。但如果每個

袋可盛多於一球，那便有 9 個可能結果，包括圖（A）虛線以下的部分，讓我們記作（A2）。圖（B）是球不可分辨的情況，由於球不可分辨，圖（A）的第一和第二個可能結果，只對應於圖（B）的一個可能結果了，即是袋 1 和袋 2 各盛一球。如果每個袋最多只能盛一球，便只有 3 個可能結果，讓我們記作（B1）但如果每個袋可盛多於一球，那便有 6 個可能結果，包括圖（B）虛線以下的部分，讓我們記作（B2）。所以，在這四個不同的客觀情況下，我們有不同的羅列方法。在每個情況下，我們都可以引用等可能性假設來計算某事件的概率，得到不同的答案。比方問袋 1 和袋 2 有一球的概率，答案分別是：

（A1）	（球可分辨，每袋最多盛一球）	$^2/_6 = {}^1/_3$
（A2）	（球可分辨，每袋可盛多於一球）	$^2/_9$
（B1）	（球不可分辨，每袋最多盛一球）	$^1/_3$
（B2）	（球不可分辨，每袋可盛多於一球）	$^1/_6$

在統計物理學（Statistical Mechanics）上，這個模型很有點意思。球代表質點（Particle），袋代表質點所處的狀態（State）。每一個袋盛多少個球，便代表一個所謂「宏觀狀態」（Macroscopic State）。起初物理學家以為質點是可分辨的，而且可以有多於一個質點處於相同的狀態，即是（A2）的情況，物理學家把（A2）叫做質點按麥克斯韋─波爾茨曼統計法則（Maxwell-Boltzmann Statistics）行動。但這法則對於當時所知的質點都不適用，由（A2）計算得來的結果並不符合實際觀測結果。於是人們便引進別的理論，例如假設質點是不可分辨的，可以有多於一個質點處於相同的狀態，即是（B2）的情況，物理學家把（B2）叫做質點按玻色─愛因斯坦統計法則（Bose-Einstein Statistics）行動，已知的例子有光子（Photon）、π-介子（π-Meson）等。不過這仍然不能解釋所有質點的運動，

有時需要假設質點是不可分辨的，而且不能有多於一個質點處於相同的狀態（物理家把這回事叫做「泡里不相容原理」（Pauli Exclusion Principle）），即是（B1）的情況，物理學家把（B1）叫做質點按費米－狄拉克統計法則（Fermi-Dirac Statistics）行動，已知的例子有電子（Electron）、質子（Proton）等。

你若有興趣，不妨試算一算，如果有 K 個質點和 N 個不同的狀態，那麼各有一質點處於最初 K 個狀態的概率是什麼，分開（A2）、（B1）、（B2）的情況來討論。

第四章

數不來怎麼辦？

在上一章我們指出了古典概率有兩項基本假設：（1）只有有限多個可能發生的結果，（2）每個結果發生的可能性一樣大。我們已經討論過（2），現在來看看（1）。事實上，不少偶然事件有無限多個可能發生的結果，例如朋友和你約好，他在二時至二時半之間來看你，他真正抵埗的時間是由 2 至 2.5 之間的一個實數（Real Number），而我們知道 2 至 2.5 之間有無限多個實數。在這些情況下，上兩章的方法用不上了，如何計算概率呢？

假定我們能夠用線段 AB 上的點代表偶然事件的可能發生的結果（見圖 4.1(a)），如果事件 E 由線段 CD 上的點代表，

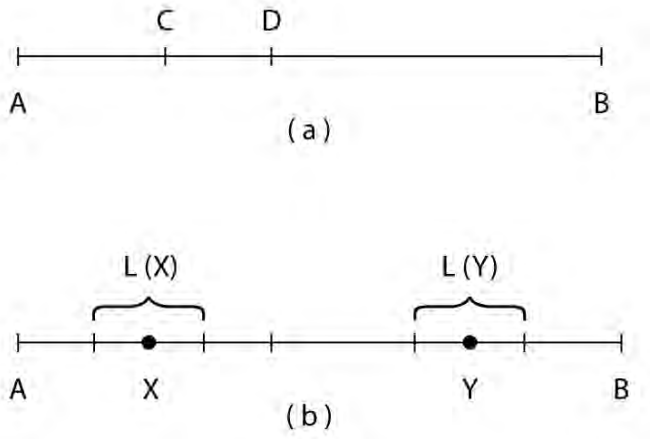

圖 4.1(a)(b)

那麼我們便說 P(E)＝（CD 長度）／（AB 長度）。這個說法，好像沒有用到什麼等可能性的假設，但其實它蘊含相似的精神。譬如 X 和 Y 是 AB 上兩個點，而 L(X)和 L(Y)分別是包含 X 和 Y 的等長線段（見圖 4.1(b)），那麼它們代表的事件便有相同的概率，因為（L(X)長度）／（AB 長度）＝（L(Y)長度）／（AB 長度）。即是說，這樣的計算，假設了事件在 X

附近發生跟在 Y 附近發生的機會均等。這個假設，數學上叫做「均勻分佈」（Uniform Distribution）。偶然事件有無限個可能發生的結果時，均勻分佈的假設代替了等可能性的假設，於是計算概率不再是數數了，而是比較線段的長短。

假定我們能夠用圖形 S 內的點代表偶然事件的可能發生的結果（見圖 4.2），如果事件 E 由圖形 A 內的點代表，那麼利

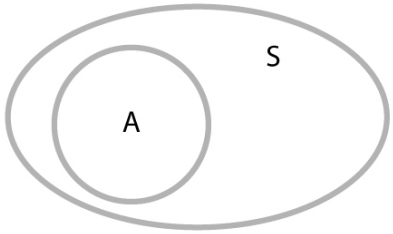

圖 4.2

用均勻分佈假設，我們便說 P(E)＝（A 的面積）／（S 的面積）。用幾何圖形上的點代表偶然事件的可能發生的結果，用幾何上的量度（如長度、面積）來計算概率，就叫做「幾何概率」（Geometric Probability）。

例一：百步穿楊滿載歸

在嘉年華會上，以下的遊戲是很普遍的：桌面上用線條劃分成很多個大小為 2.2cm × 2.2cm 的正方形，參加者把直徑 2cm 的錢幣拋到桌面上。假如錢幣壓着桌面上的線條，便沒有中獎。假如錢幣恰巧落在一個正方形內，便可以得到獎品（見圖 4.3），你猜中獎的機會是多少呢？要解答這個問題，只需要抓着關鍵，那就是錢幣中心的落點位置，它決定了中獎與否。錢幣的中心 X，一定落在某一個正方形 ABCD（連它的邊）上。假如 X 的落點距離 BC 小於 1cm（即是 XE 長度小於 1cm），那麼錢幣便壓着 BC（見圖 4.3）。假如 X 的落點距離 AB 小於 1cm

（即是 XF 長度小於 1cm），那麼錢幣便壓着 AB（見圖 4.3）。

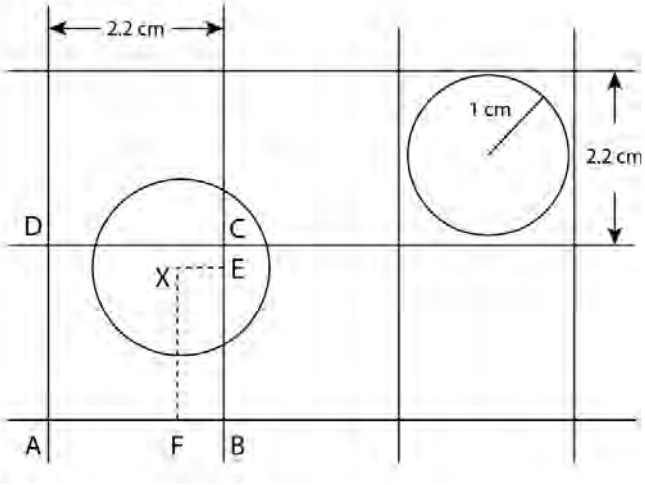

圖 4.3

如果錢幣沒有壓着 ABCD 的邊，X 的落點必須距離 AB、BC、CD、DA 都不小於 1cm，換句話說，X 的落點必須在小正方形 A′B′C′D′ 內（見圖 4.4）。

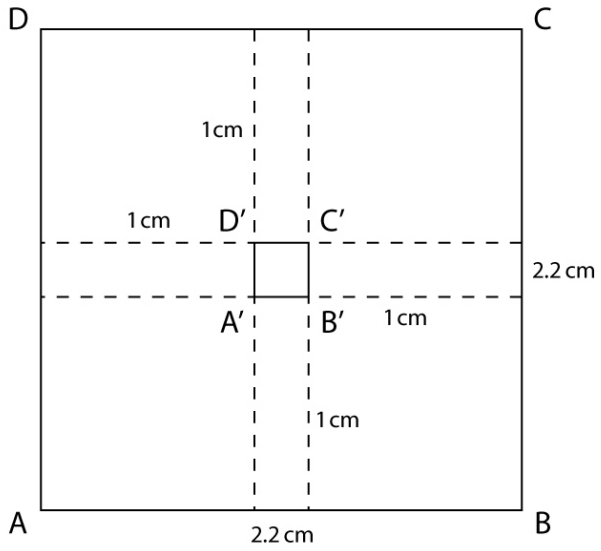

圖 4.4

但 X 的落點有無限多個可能的結果，超越了古典概率模型的範疇。如果假定落點是隨意的，均勻分佈的假設便適用了，所以 X 落在 A′B′C′D′內的概率是（A′B′C′D′ 的面積）／（ABCD 的面積）。容易看到，A′B′C′D′ 邊長為 0.2cm，所以 A′B′C′D′ 的面積是 0.04cm^2。正方形 ABCD 的面積是 4.84cm^2，所以中獎的

概率是 0.04／4.84 = 0.00826…，還小於百分之一。要百步穿楊，真不容易呢！

例二：偏心的地下車站

陳先生是個電影迷，有兩所電影院 A、B 上演的影片，他特別喜歡。電影院 A 在他家的東面，電影院 B 在他家的西面。由於他經常不能決定那所電影院上演的影片較好，他便採取以下的辦法：他去到地下車站，如果東行的火車先到他便乘搭東行火車往電影院 A，如果西行的火車先到他便乘搭西行火車往電影院 B。他以為這樣做應該不會偏袒任何一所電影院了。因為他知道東行車和西行車的班次一樣多，都是每 10 分鐘一班。但很奇怪，他採用了這個辦法後，發覺十次有九次都是去了電影院 A，為什麼他常常乘搭了東行火車呢？你們知道原因嗎？如果陳先生不單只查問火車的行走次數，而且也查問火車到站時間的話，他便會明白過來。原來東行火車於 18.09、18.19、18.29、18.39、18.49、18.59 準時到站，而西行火車於 18.00、18.10、18.20、18.30、18.40、18.50、19.00 準時到站（見圖 4.5）。

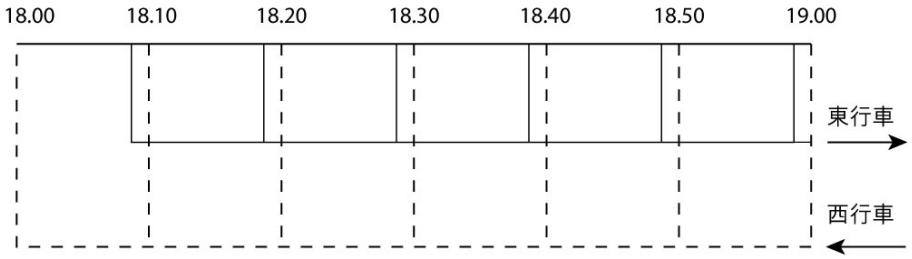

圖 4.5

假定陳先生每次到地下車站的時間，是由下午六時至六時十分之間隨意一個時刻，那麼我們便知道：如果他在 18.00 至 18.09 到達車站，東行火車先到，於是他去了電影院 A；如果他在 18.09 至 18.10 到達火車站，西行火車先到，於是他去了電影院 B。但 18.00 至 18.09 有九分鐘，而 18.09 至 18.10 卻只有一分鐘，

所以有 $^{9}/_{10}$ 機會他去了電影院 A。假定陳先生每次到地下車站的時間，是由下午六時至七時之間隨意一個時刻，試利用線段長度的比例（見圖 4.5）計算「去了電影院 A」的概率。這又是一個幾何概率的例子。

例三：圓周率和概率

圓周率 π（圓周和直徑的比）是個大家非常熟悉的常數，這個常數怎會跟概率扯上關係呢？以下是解釋拋針實驗（見第一章）如何利用概率來估計圓周率的值。

假設平面上畫一些平行線，兩線之間的距離是 a 。隨意投一枚長為 ℓ（ℓ 小於 a）的針在平面上，每次投針後，看看針有沒有和其中一條平行線相交。投擲 N 次後，如果當中 M 次針和平行線相交，那麼相交頻率便是 $M／N$ 了。當投擲次數是很大時，相交頻率通常很接近相交概率。我們將要證明，相交概率是 $2\ell／\pi a$，由此便可以估計 π 的值了。

要計算相交概率，先注意有兩個因素決定針的位置（相對於平行線）：一是針的中點的落點，二是針和平行線所成的角度。假設針的中點至平行線（取較近的那一條）的距離是 h，而針和平行線所成的角是 θ（見圖 4.6(a)），知道了 θ 和 h 的值，便知道了針和平行線的相對位置。所以每次投針的結果，可以由一點（座標為 θ 和 h）代表，由於 $0 \le h < a／2$ 和 $0 \le \theta < \pi$，

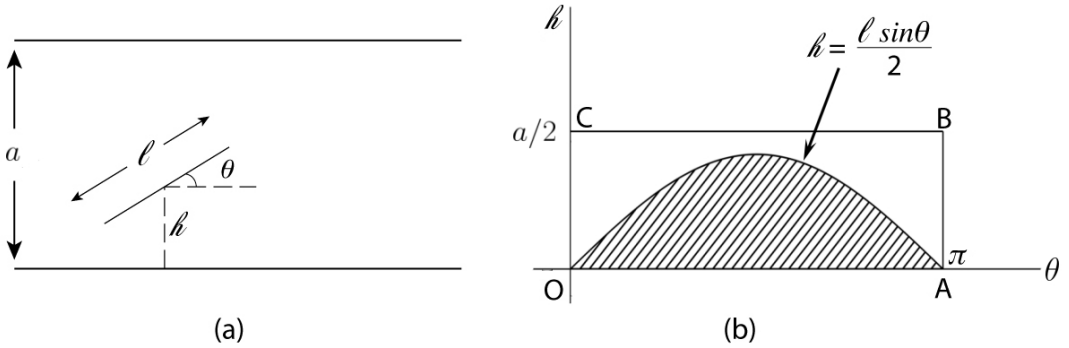

圖 4.6(a)(b)

這些點構成長方形 OABC（見圖 4.6(b)）。如果我們畫上方程 $h = \ell \sin\theta / 2$ 的曲線，那麼在這曲線以下的點（圖 4.6(b)中畫了斜線的部分），便滿足 $h \le \ell \sin\theta / 2$。你試自己證明，針和平行線相交與否，取決於 $h \le \ell \sin\theta / 2$ 與否。由於針的中點的落點是隨意的，它和平行線所成的角度也是隨意的，所以可以引用均勻分佈的假設，因而計算得相交概率是（斜線部分的面積）／（OABC 的面積）。利用微積分可以計算斜線部分的面積，答案是 ℓ（不懂微積分的讀者，只好先接受了這個答案），而 OABC 的面積是 $\pi a / 2$，所以相交概率是 $2\ell / \pi a$。

例四：$^1/_2 = {}^1/_3 = {}^1/_4$？

數學家伯川（Bertrand）給以下的概率問題提出三個解答，然而每個解答有不同的答案！問題是這樣的：在半徑為 1 的圓內隨意畫一條弦（Chord），問這條弦距圓心 O 近於 $^1/_2$ 的概率是多少？

（1）弦的位置，由它的中點 M 的位置決定，因為弦 AB 一定是通過 M 而垂直於 OM 的（見圖 4.7(a)）。由於圓心到弦的距離就是 OM 長度，要求弦距圓心近於 $^1/_2$，M 必須落在以 O 為中心而半徑為 $^1/_2$ 的圓內。但 M 是隨意取的，所以答案是：概率＝（半徑是 $^1/_2$ 的圓的面積）／（半徑是 1 的圓的面積）＝ $^1/_4$。

（2）先假定 A 是弦的一個端點，然後研究另一個端點 B 落在那裏。連接 OA，作 AE 及 AF 使∠OAE＝∠OAF＝30°（見圖 4.7(b)）。容易計算，O 至 AE 和 AF 的距離都是 $^1/_2$。所以如果 B 落在圓弧 $\overset{\frown}{AE}$ 或 $\overset{\frown}{AF}$ 上，弦距圓心遠於 $^1/_2$。但 B 是隨意取的，所以答案是：

概率＝（圓弧 $\overset{\frown}{EF}$ 長度）／（圓周長度）＝ $^1/_3$。

（3）考慮所用同一方向的弦，例如平行於直線 L 的弦（見

圖 4.7(c)）。取直徑 XY，垂直於 L。所有和 L 平行的弦，位置都由該弦和 XY 的交點 M 決定，顯然 OM 長度就是圓心到弦的距離。在 XY 上取 C 和 D，使 OC＝OD，長度是 $^1/_2$。那麼，要求 OM 長度小於 $^1/_2$，M 必須落在線段 CD 內。但 M 是隨意取的，所以答案是：

概率＝（CD 長度）／XY 長度＝ $^1/_2$。

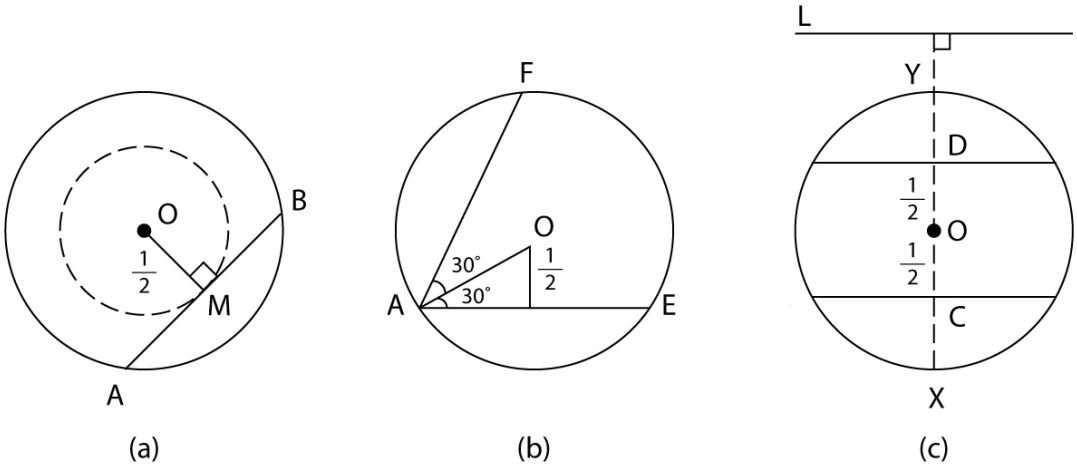

圖 4.7(a)(b)(c)

以上三個解答，分別得出答案是 $^1/_4$、$^1/_3$、$^1/_2$。那一個才是正確的答案呢？其實，三個答案也沒有錯，但必須先弄清楚問題裏「隨意畫一條弦」這句話的意思。在（1）我們假設隨意選弦的中點，然後畫出弦來。在（2）我們假設隨意選弦的端點，然後畫出弦來。在（3）我們假設先定了一個方向，然後從這方向的弦中隨意選一條。在三個解答中，我們以不同的方法來代表所有的可能的結果，卻都引用均勻分佈的假設，就有如在達朗貝爾（d’Alembert）問題裏對不同的數法都引入等可能性的假設，難怪得出不同的答案了（見第三章例一）。那一個解答比較合理，就視乎如何隨意畫弦。一定要通過對實際問題的瞭解，才能決定那一個畫法是符合均勻分佈的假設。你看，伯川問題帶來的困惑，在本質上不是和達朗貝爾問題帶來的困惑相同嗎？

第五章

不數行嗎？

讓我們嘗試把前四章的討論來一個較有系統的總結，為了有效地做這件工作，先引入以下的輔助術語：

「事件 A 不發生」是一個事件，記作 $\overline{A}$ 。

「事件 A 和事件 B 之中至少有一個發生」是一個事件，記作 $A \cup B$。

「事件 A 和事件 B 同時發生」是一個事件，記作 $A \cap B$。

如果你們熟悉集合論（Set Theory）的語言，便知道為什麼我們用以上的符號。如果你們不熟悉集合論的語言也不打緊，下面我們會以圖解輔助敘述的。我們可以把一切可能發生的結果用一個集合（Set）S 來表示，S 的元素（Element）就是那些可能發生的結果，S 就叫做「樣本空間」（Sample Space）。如果你沒有聽過集合這字眼，不妨把 S 看作是一個長方形，長方形內的一點代表一個可能發生的結果，碰到只有有限個可能發生的結果的情形，便只考慮長方形內有限個點。一個事件，是由某些結果組成，所以它是 S 的一個子集（Subset）A。利用圖解，A 就是長方形 S 的一部份（見圖 5.1）。不難見到，事

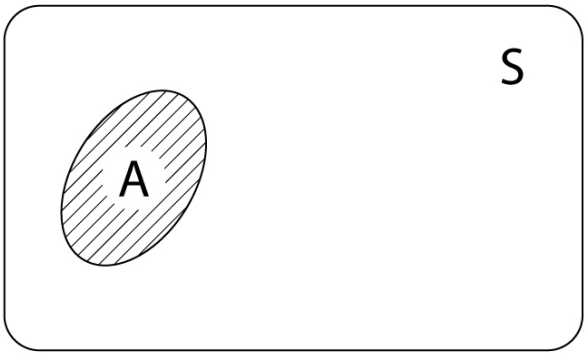

圖 5.1

件 $\overline{A}$ 就是 A 在 S 的餘集（Complement），事件 $A \cup B$ 就是 A

和 B 的並集（Union），事件 A∩B 就是 A 和 B 的交集（Inter section）。利用圖解，便如下圖所示（見圖 5.2）。

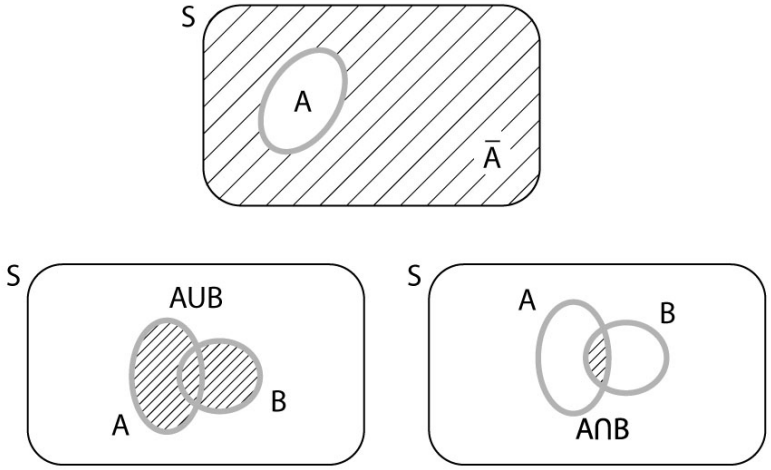

圖 5.2

讓我們再用第二章的例子來說明吧。袋裏有兩個黑球和一個白球，隨意地抽一個，放回袋裏，再隨意抽一個。A 是「第一次抽着白球」這事件，B 是「第二次抽着黑球」這事件。我們可以這樣選取樣本空間，考慮所有數偶（a, b），其中 a 是 1、2 或 3，代表第一次抽着的球的號碼，b 也是 1、2 或 3，代表第二次抽着的球的號碼（記得 1 號和 2 號是黑球，3 是白球）。這 9 個數偶，組成樣本空間 S（見圖 5.3），它的元素便是 S_1 = (1, 1)、S_2 = (2, 1)、S_3 = (3, 1)、S_4 = (1, 2)、S_5 = (2, 2)、S_6 = (3, 2)、S_7 = (1, 3)、S_8 = (2, 3)、S_9 = (3, 3)。A 是由 S_3、S_6、S_9 組成的子集，B 是由 S_1、S_2、S_3、S_4、S_5、S_6 組成的子集（見圖 5.3）。所以 $\overline{A}$ ={S_1、S_2、S_4、S_5、S_7、S_8}，A∪B={S_1、S_2、S_3、S_4、S_5、S_6、S_9}，A∩B={S_3、S_6}。

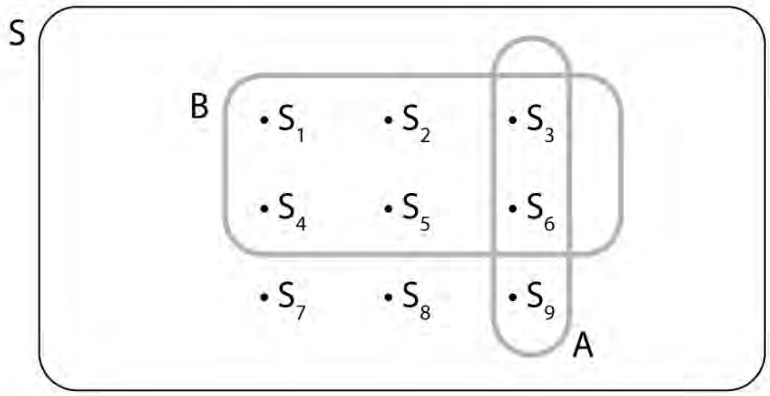

圖 5.3

如果事件 A 和事件 B 不能同時發生，它們叫做互不相容的（Mutually Exclusive）。用集合論的語言，就是說 $A \cap B$ 是空集（Empty Set），空集代表一個不可能事件。更一般地，如果若干個事件中任何兩個都是互不相容的，它們就叫做互不相容的。如果若干個事件中至少有一個會發生，它們構成完備群（Complete System），用集合論的語言，就是說它們的並集是 S。經常碰到構成完備群而又互不相容的若干個事件，我們把它們稱為基本事件（Simple Event），比方在上面的例子，S_1、S_2、S_3、S_4、S_5、S_6、S_7、S_8、S_9，便是基本事件了。

我們也可以換另一個樣本空間來描述同一個情況的，這次 S 只有四個元素，就是 ww、wb、bw、bb。每一個表示兩次抽球的結果，頭一個字母表示第一次抽着的球的顏色（w 代表白，b 代表黑），尾一個字母表示第二次抽着的球的顏色。這樣的話，A 就是由 ww 和 wb 組成的子集，B 就是由 wb 和 bb 組成的子集（見圖 5.4）。所以，$\overline{A} = \{bb, bw\}$，$A \cup B = \{bb, wb, ww\}$，$A \cap B = \{wb\}$。

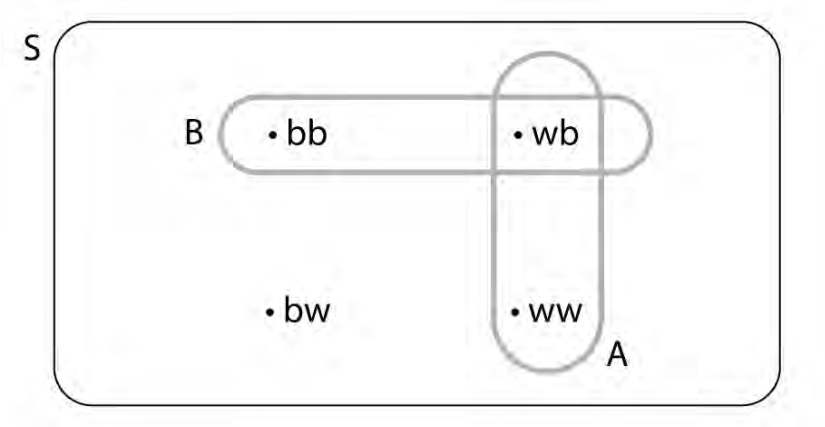

圖 5.4

現在輪到最具關鍵性的步驟了，就是有了樣本空間後怎樣給每個事件賦予適當的概率，以反映這個數學模型意圖表達的客觀情況。關於這一點的討論，涉及層面較深刻，而且也不純粹是數學上的問題，所以不打算在這樣的一本小書裏談論，在這裏我們只打算討論事件概率的一些性質，瞭解這些性質便足以明白這章要談的例子。既然這些性質是客觀事實的數學描述，也就不難接受的。基本性質只有三點：

（1）事件 A 的概率是個 0 至 1 之間的實數，就是說

$0 \le P(A) \le 1$。

（2）事件 S 肯定發生，就是說 $P(S) = 1$。

（3）兩個互不相容的事件的概率等於每個事件的概率的和，就是說當 $A \cap B$ 是空集時，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。特別地，$P(A) + P(\overline{A}) = 1$。更一般地，如果 A_1、…、A_n 是 n 個互不相容的事件，那麼 $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$。所以，如果 A_1、…、A_n 是基本事件，便有 $P(A_1) + \ldots + P(A_n) = 1$。（註）

靠以上的性質，我們可以計算不少有關概率的問題。讓我們再看一次前面的袋和球吧，樣本空間由 9 個數偶 S_1、…、S_9 組成。容易明白，只要我們給每個 S_i 賦予概率，任何事件的概

率便可以由（3）得到。客觀上我們知道每個 S_i 發生的可能性是相同的，所以我們給每個 S_i 賦予相同的概率，但因為 S_1、…、S_9 是基本事件，它們的概率加起來等於 1，所以每個 $P(S_i)$ 等於 $1/9$。A 是由 3 個基本事件組成，所以 $P(A) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3$。B 是由 6 個基本事件組成，所以 $P(B) = 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 = 2/3$。更一般的情形是這樣，假如一切可能發生的結果可以用 N 個等可能性的基本事件表示，而其中 M 個基本事件的發生導致事件 A 的發生，（用集合論的語言，說得較為明確，就是這 M 個事件的並集是 A），那麼 A 的概率 $P(A)$ 等於 M/N。當然，這就是在第二章介紹過的概率古典定義了。

你們必須留意，如何對事件賦予概率是十分重要的一步，在第三章我們已經通過例子說明這點。比方如果我們換了用｛ww, wb, bw, bb｝這個樣本空間來描述同樣的情況，是否也賦予 $P(ww) = P(wb) = P(bw) = P(bb) = 1/4$ 呢？ 按照先前的模型，ww 其實是由（3, 3）組成，所以應該 $P(ww) = 1/9$。wb 是由（3, 1）和（3, 2）組成，所以應該 $P(wb) = 2/9$ 。同樣道理，$P(bw) = 2/9$，$P(bb) = 4/9$。因此，在這個樣本空間裏，四個基本事件並非是等可能性的，我們不能引用概率古典定義，要是硬套概率古典定義，給每個基本事件賦予相同的概率，就不能夠好好地反映客觀情況了。這樣一來，雖然數學上的計算沒有錯誤，計算出來的結果與實際情況不符。（假如袋裏仍然放兩個黑球和一個白球，仍然是隨意抽一個，放回去再隨意抽一個，不過這次球的大小不同，以致某些球比較另一些球更易被抽着。那麼有可能使 ww、wb、bw、bb 這四個事件變成等可能性的。你們看完這章後，不妨想一想，算一算，在什麼情況下，這個會發生呢？）

讓我們回到由 S_1、…、S_9 組成的樣本空間，而每個 $P(S_i)$ 等於 $1/9$。利用它我們可以計算 $P(A \cap B)$，即是「第一次抽着

白球和第二次抽着黑球」的概率。當然，在第二章裏，我們已經計算過，答案是 $^2/_9$，在另一個樣本空間裏，這就是 P(wb)，我們也知道答案是 $^2/_9$，但現在我們希望只用基本性質 (1)、(2)、(3) 和基本事件 S_i 的概率來尋求答案。要計算 P(A∩B)，必須先引入一個新概念，就是事件間的獨立性（Independence）。從客觀經驗上我們知道有些事件的發生與否，並不影響另一些事件的發生，反之亦然。例如在上面的例子，第一次抽着白球抑或黑球並不會影響第二次抽着什麼顏色的球（當然，如果不把第一次抽着的球放回去便抽第二次，情形便截然不同了）。我們把這些事件稱為獨立的，對於獨立事件 A 和 B，以下的公式成立：

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)。$$

要明白箇中道理，最好等待下一章介紹了條件概率之後才再作詳細解釋，暫時只好請你們先接受它，然後看看怎樣運用它去計算。回到原來的例子，P(A) = $^1/_3$，P(B) = $^2/_3$，A 和 B 是獨立的，所以 P(A∩B) = $^1/_3 \times {}^2/_3 = {}^2/_9$。我們也可以利用它來計算 P(A∪B)，這是因為 A∪B 也即是 A∪C，而 C = $\overline{A} \cap B$（見圖 5.5）。但 A 和 C 是互不相容的（A 和 B 卻不是，所以我們才需要加添這一步變換），所以 P(A∪B) = P(A) + P(C)。

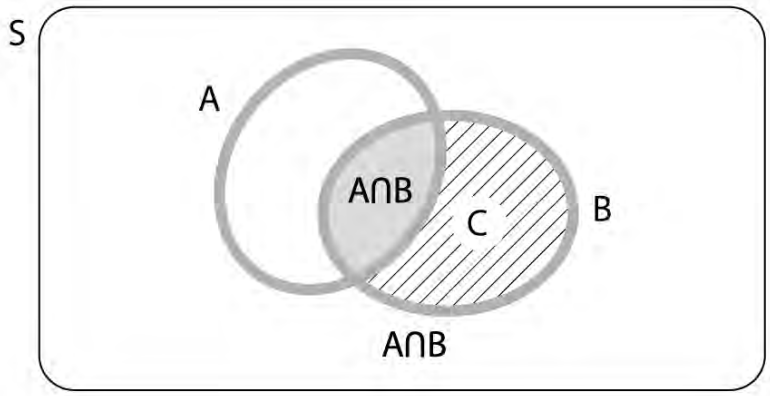

圖 5.5

因為 C 和 A∩B 也是互不相容的，而 C∪(A∩B)正好就是 B

（見圖 5.5），所以 $P(C) = P(B) - P(A \cap B)$。把兩式相加，便得到以下公式：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)。$$

在這個例子裏，$P(A \cap B) = {}^{1}/_{3} + {}^{2}/_{3} - {}^{2}/_{9} = {}^{7}/_{9}$。你們有沒有留意到，上面的公式是基本性質（3）的推廣呢？當 A 和 B 是互不相容的事件時，$A \cap B$ 是不可能事件，所以 $P(A \cap B) = 0$，公式便化為 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$了。你再想一想，如果有三個事件 A、B、C 時，$P(A \cup B \cup C)$是什麼呢？當 A、B、C 是互不相容時，公式化為什麼？（有 *n* 個事件時又怎樣呢？）

例一：「抗疫靈」有效嗎？

有一種疫症，死亡率高達 50%，醫學界力謀對策。有人初步發現一種特效藥物，暫定名為「抗疫靈」。根據實驗報告，有 4 名患上那種疫症的病人曾接受「抗疫靈」的治療，結果全部康復過來。於是有人認為試驗是百分之一百成功，「抗疫靈」一定是非常有效的藥物了，你同意嗎？（當然，在實際情形，不會只用 4 名病人試驗一種藥物的，甚至不會先用人來作試驗對象，這裏為求方便敘述才作這假設吧。）

假如「抗疫靈」根本一點功效也沒有，病人康復與否跟是否服用「抗疫靈」毫無關係，那麼 4 名病人全部康復的概率是多少？每名病人康復的概率是 ${}^{1}/_{2}$，而且一名病人康復與否並不影響另一名病人康復的機會，所以我們正在考慮 4 個獨立事件同時發生的概率。每個事件發生的概率是 ${}^{1}/_{2}$，答案就是$({}^{1}/_{2})^{4} = 0.625$。這答案的數值並不算太小，也就是說，即使「抗疫靈」毫無功效，還是有不算太小的可能性，使施諸 4 名病人的試驗看似絕對成功的，所以「抗疫靈」不一定是非常有效的藥物。

例二：爸爸和小胖下棋

小胖很喜歡下棋，常常纏着爸爸媽媽跟他對奕。有一天，爸爸對他說：「小胖，我們來一次棋賽吧。媽媽和我是一隊，你自己是另一隊。媽媽和我輪流跟你對奕三局，但我們不用三盤兩勝的規則，你要在三局中連贏兩局才算勝利。你想跟我先下還是跟媽媽先下第一局呢？」小胖心裏盤算：「爸爸棋術比媽媽高一點，要勝他比較難。不如和媽媽下第一局，便只用和爸爸碰一次。如果和爸爸下第一局，豈不是要和他碰兩次嗎？好，就這樣決定。」於是他答道：「我和媽媽下第一局。」你認為小胖的選擇是明智之舉嗎？（為簡化敘述，假設每局非勝即負，沒有和局。）

先來這樣想想，小胖要連贏兩局，必須贏第二局。和媽媽下第二局，勝的機會較大，因此應該和媽媽下第二局，也就是說，應該先和爸爸下第一局。讓我們計算一下小胖連贏兩局的概率，看看是否得到同樣的結論。假設小胖勝爸爸的概率是 a，勝媽媽的概率是 b，已經知道 a 小於 b。A 是「三局中小胖至少連贏兩局」這事件，它是由三個互不相容的事件組成，即是「三局全勝」，「頭兩局勝而第三局敗」，「頭局敗而後兩局勝」。如果小胖先和爸爸下第一局，那麼這三個事件的概率分別是 aba，$ab(1-a)$，$(1-a)ba$（在這裏的計算我們假設了一件事，你曉得是什麼嗎？）所以 $P(A) = aba + ab(1-a) + (1-a)ba$（為什麼？）$= ab(2-a)$。如果小胖先和媽媽下第一局，計算也是一樣，只不過 a 和 b 的作用互調了，即是說在那情況底下，$P(A) = ba(2-b)$。既然 a 小於 b，前者大於後者，即是說跟爸爸下第一局，勝的機會才較大。如果你興猶未盡，可以試考慮 N 局的情形。N 是奇數如何？N 是偶數如何？又如果決定勝負

是採用普通三盤兩勝的辦法，小胖應選擇先跟爸爸抑或媽媽下第一局呢？

例三：患病者的百分比

為了估計某疾病的普遍性，醫務衛生署進行了一項調查研究，抽取一萬人的血液樣本來作化學檢驗，以估計患這種疾病的百分比。怎樣求這個百分比呢？一個方法自然是對一萬個樣本逐個進行檢驗，如果血液呈陰性反應，便斷定受驗者沒有患這種病，如果血液呈陽性反應，便斷定受驗者患上這種病。這樣便知道在一萬人中有多少人患上這疾病，於是可以估計患病者的百分比了。雖然理論上這是簡單易明，但進行一萬次檢驗，很費工夫時間。另外有個方法，是隨意地把一萬人分成 100 組，每組 100 人。把同組的 100 人的血液樣本混在一起進行檢驗，這樣只用檢驗 100 次。譬如說，100 次裏有 60 次呈陰性反應，怎樣由此估計患病者的百分比呢？

假定患病的概率是 P，那麼 100 人中全部沒有患病的概率便是 $(1-P)^{100}$（為什麼？）現在共有 100 個樣本，每個樣本呈陰性反應的概率等於全部 100 人都沒有患病的概率，因為只有這樣，那 100 人的血液樣本混在一起，才會呈陰性反應。所以我們估計 $(1-P)^{100} \approx 60/100$，即是 $P \approx 0.0051$，所以患病者百分比的估計值是百分之 0.51。

例四：飛機失事的概率

怎樣量度機件的可靠性呢？可靠性的高低，由機件在某一段時間內（例如一天或者一個月）發生故障的概率來衡量。概率大表示機件的可靠性低，概率小表示機件的可靠性高。一個機器系統由很多零件組成，如果我們知道每個零件的可靠性，是否可以計算整個系統的可靠性呢？ 假如零件是串聯（In

Series）的話，只要其中一個零件發生故障，整個機器便發生故障了。如果我們用 P_1，…，P_n 代表每個零件（共有 n 個）發生故障的概率，又假設每個零件是獨立地操作的話，整個機器發生故障的概率就是 $1-(1-P_1)\ldots(1-P_n)$。因為只有當每個零件都不發生故障時，機器才不發生故障，所以機器不發生故障的概率是 $(1-P_1)\ldots(1-P_n)$，從 1 減去這個概率，就是機器發生故障的概率了。假如零件是並聯（In Parallel）的話，只有當全部零件發生故障時，整個機器才發生故障。如果我們用 P_1，…，P_n，代表每個零件（共有 n 個）發生故障的概率，又假設每個零件是獨立地操作的話，整個機器發生故障的概率就是 $P_1 \ldots P_n$。

明白以上的基本計算，便可以研究一些較複雜的系統。譬如下圖的飛機有三部引擎，分別用 A、B、C 代表（見圖 5.6(a)）。

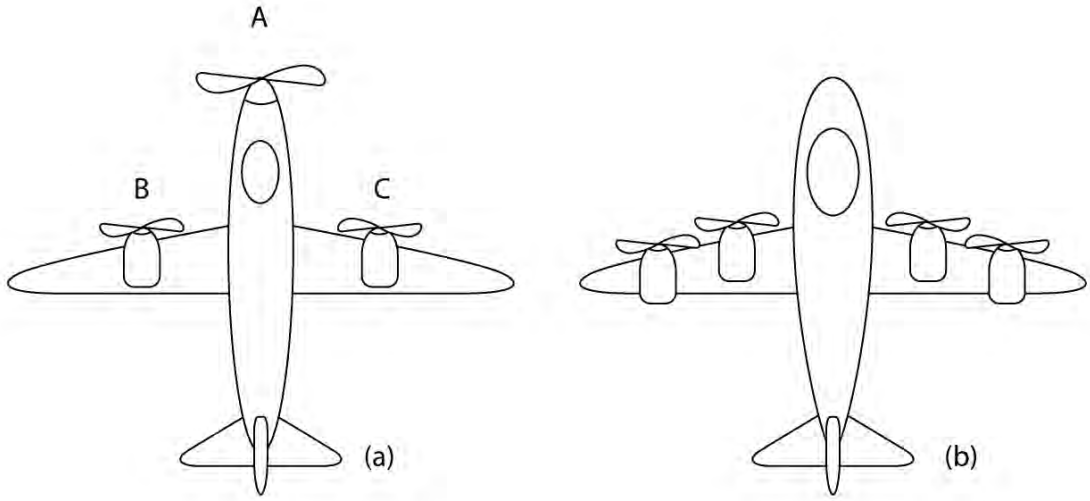

圖 5.6(a)(b)

如果中間的引擎沒有發生故障或者兩邊的引擎同時沒有發生故障，飛機是可以穩定飛行而不會發生意外。假設在 500 次飛行中，A 平均失效一次。在 200 次飛行中，B（或 C）平均失效一次。問飛機失事的概率是多少？根據已有的資料，可以把 A、B、C 看成是三個零件，其中 B 和 C 串聯起來，這個串聯 B 和 C 的合成系統又和 A 並聯起來（見圖 5.7）。A 發生

故障的概率是 0.002，B（或 C）發生故障的概率是 0.005。

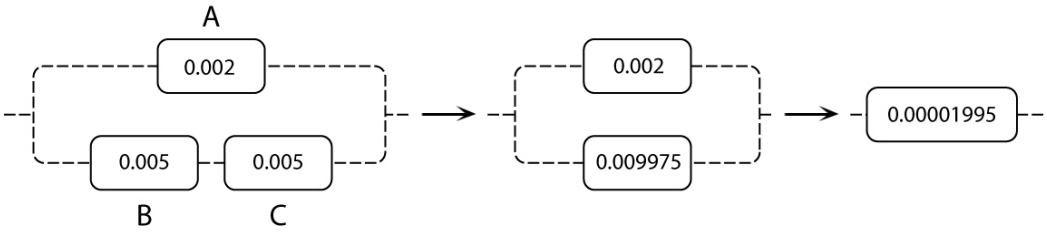

圖 5.7

要計算整個系統的失事概率，我們把它逐步簡化。首先，B 和 C 合起來是一個串聯系統，發生故障的概率是 1 – (1 – 0.005) × (1 – 0.005) = 0.009975。這系統和 A 並聯起來，成為全個系統，所以全個系統發生故障的概率是 0.009975 × 0.002 = 0.00001995，是個相當小的概率。

現在來考慮一架三引擎飛機（見圖 5.6(a)）和一架四引擎飛機（見圖 5.6(b)）。如果三引擎飛機中間的引擎沒有發生故障或者兩邊的引擎同時沒有發生故障，飛機不會發生意外。如果四引擎飛機每邊至少有一部引擎沒有發生故障，飛機不會發生意外。假設每部引擎發生故障的概率是 P，請你計算一下，三引擎飛機安全還是四引擎飛機安全呢？

例五：贏了技術輸了運氣

在球賽中，不一定強者必勝。弱旅勝強旅的情形，不時出現，俗語所謂「爆冷門」。我們說甲隊技術比乙隊高，只意味如果甲隊和乙隊對賽多次的話，甲隊勝的次數比乙隊勝的次數多吧。例如在 100 次比賽中，甲隊勝 60 次而乙隊勝 40 次。但如果只以一場比高下，甲隊可能勝乙隊，乙隊也可能勝甲隊，不妨假設甲隊勝乙隊的概率是 60／100 = 0.6 。為了減低「爆冷門」的機會，一個通常採用的辦法就是比賽多次，以勝多數次數者為優勝者，例如以三盤兩勝或五盤三勝來決定勝負。假如用三盤兩勝的辦法，「爆冷門」的機會是多少呢？（已知若

只賽一次，「爆冷門」的機會是 0.4。）甲落敗的情形，只有三種，即是（乙乙），（甲乙乙），（乙甲乙）。這裏的記法，括號內從左至右依次列出每一盤的勝方，例如第二種情形是甲先勝一盤然後乙連勝兩盤。它們的概率分別是 0.4 × 0.4，0.6 × 0.4 × 0.4，0.4 × 0.6 × 0.4。當然，我們用了獨立性假設才會如此，要是有「知恥近乎勇」或者「給勝利沖昏了頭腦」的情形出現，這假設便不適用了。「爆冷門」的概率就是把這些加起來，得到 0.352，比 0.4 好不了多少！你可按照同樣道理，試計算五盤三勝時「爆冷門」的概率，答案是 0.317…，還不算很低呢！他日如果你在五盤三勝的比賽中落敗，請勿沮喪，有相當大的可能性你是贏了技術輸了運氣呢！（如果 $2N-1$ 盤中 N 盤勝便算優勝者，情況又怎樣呢？）

例六：旗鼓相當抑或技高一籌？

世界乒乓球團體錦標決賽，由甲、乙兩國選手作賽九局，誰先取得五局勝利誰便得冠軍。結果甲國以 5 比 3 的比數取得勝利，評論員說：「由於甲國以 5 比 3 的大比數擊敗乙國，可見兩隊的實力，是有一段距離的。」不是嗎？如果兩隊實力相當，賽事多數以 5 比 4 終場，現在比數是 5 比 3，兩隊實力一定有一段距離了。且慢，不如讓我們真正算一算吧。如果兩隊實力相當，即是說每局甲（乙）勝的概率是 0.5，我們要計算以各種比數終場的概率。如果比數是 5 比 0，而甲是勝方，那麼甲必須連勝五局，這個概率是$(0.5)^5$。換了是乙為勝方，乙便必須連勝五局，這個概率也是$(0.5)^5$。所以比數是 5 比 0 的概率是 $2 \times (0.5)^5 = 0.0625$。

如果比數是 5 比 1，而甲是勝方，比賽結果不外以下五種其中之一：（乙甲甲甲甲甲）、（甲乙甲甲甲甲）、（甲甲乙甲甲甲）、（甲甲甲乙甲甲）、（甲甲甲甲乙甲），其中括號

內從左至右依次列出每局勝方。每一個結果的概率都是 $(0.5)^6$，所以加起來就是 $5 \times (0.5)^6$。換了是乙為勝方，計算也是一樣，概率也是 $5 \times (0.5)^6$。所以比數是 5 比 1 的概率（不理誰勝）是 $2 \times 5 \times (0.5)^6 = 0.15625$。可以看出計算的規律：要計算甲以 5 比 1 取勝的概率，必須設甲勝最後一局（即第六局），而前五局中，乙要勝一局，所以共有 C(5, 1)個可能性，所以概率是 $C(5, 1) \times (0.5)^6$。再把它乘 2，便是答案了。

看了上面的規律，便不難計算比數是 5 比 2 的概率，答案是 $2 \times C(6, 2) \times (0.5)^7 = 2 \times 15 \times (0.5)^7 = 0.234375$，請你驗算一下吧。同樣道理，比數是 5 比 3 的概率是 $2 \times C(7, 3) \times (0.5)^8 = 2 \times 35 \times (0.5)^8 = 0.2734375$，比數是 5 比 4 的概率是 $2 \times C(8,4) \times (0.5)^9 = 2 \times 70 \times (0.5)^8 = 0.2734375$。有趣的是後面兩種情形發生的概率是一樣的！即使兩隊旗鼓相當，比賽以 5 比 3 終場的機會，和比賽以 5 比 4 終場的機會是一樣大，所以 5 比 3 的比數，並不足以說明勝方的確技高一籌呢！

例七：各打三十大板的糊塗判官

陪審團有甲、乙、丙三名成員。甲和乙都是理智從事的，就只有丙在判案那天多喝了酒，到時不問是非曲直，在「有罪」或「無罪」兩個判決中胡亂選一個。試問這個陪審團的判決正確與否，會否因這位糊塗判官的所為而大受影響呢？

我們假定甲和乙兩人的判決是正確的概率都是 P，而丙的判決是正確的概率是 $1/2$。我們也假設三人是獨立地作判決的，誰也不會影響誰。由於每人的判決，可以是正確，也可以是錯誤，所以共有 8 個可能。由於他們獨立地作判決，每個可能發生的概率是不難計算出來的，列成下面的表（見表 5.8）。整個判案正確與否，決定於有沒有兩人或兩人以上作出正確的判決，結果見諸下表（見表 5.8）。由此可知，陪審團的判決是正

確的概率是

$$\frac{P^2}{2}+\frac{P^2}{2}+\frac{P(1-P)}{2}+\frac{(1-P)P}{2}=P\text{。}$$

即是說，有了這位糊塗判官在場，這個三人陪審團的表現，只及得上一個一人陪審團而已！（如果丙不喝酒，他的判決是正確的概率也是 P 的話，情形便變得怎樣了？請你算一算。）

甲的判決	乙的判決	丙的判決	概率	陪審團判決
✓	✓	✓	$P^2/2$	✓
✓	✓	✗	$P^2/2$	✓
✓	✗	✓	$P(1-P)/2$	✓
✓	✗	✗	$P(1-P)/2$	✗
✗	✓	✓	$(1-P)P/2$	✓
✗	✓	✗	$(1-P)P/2$	✗
✗	✗	✓	$(1-P)^2/2$	✗
✗	✗	✗	$(1-P)^2/2$	✗

✓ = 正確的決定
✗ = 錯誤的決定

表 5.8

話得說回來，這例子旨在說明如何運用事件概率，對審判這回事卻是過份簡化了，與實際情況不相符的。數學史上曾經有一段與此有關的沉痛教訓，十九世紀有些具影響力的數學家熱衷於把概率論應用於某些社會現象，但因為未曾充份考慮這些社會現象的本質，便運用得不正確，得出來的結果，被形容為「數學誕語」，連帶使概率論也蒙上污名，以致它的發展在西歐有一段停滯時期！其中一個不正確的應用，就是審判問

題。拉普拉斯（Laplace）假設每位法官的判決是正確的概率是個常數，而且各位法官是獨立地作判決的，從而得出這樣的結論：只要審判中有許多法官參加而法庭是以多數表決判案的話，審判便會非常公正了！

（註）在概率論的公理化處理上，性質（3）要推廣至可數（Countable）的情形，在這本小書裏不詳細討論了。

第六章

期望有多大？

為了方便敘述，讓我們引入一個新概念。事實上，也不算新了，因為大家在前幾章裏已經和它見過面，而且還不時和它打交道，只不過尚未請教尊姓大名吧！這就是「隨機變量」（Random Variable）。所謂隨機變量，就是一個取值含有偶然性成分的變量。以投擲一顆骰子為例，出現的點數可以是 1 至 6 之間任何一個整數，所以它是個變量，它取什麼值帶有偶然性，所以它是個隨機變量。但由於事件的概率是確定的，所以它取某一值的概率是確定的。為了描述這個隨機變量，我們可以借助下面的表（見表 6.1）。當然，這個表只是描述投擲一顆

出現的點數	1	2	3	4	5	6
概率	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

表 6.1

均勻骰子的情況，如果骰子是不均勻的，對應於每一個值的概率便不再是 $1/6$ 了。有時變量不一定取數值，但我們仍然可以把它化為取數值的形式，比方拋一枚錢幣，可能出現人像，也可能出現字，我們用 0 代表前者，用 1 代表後者。有時變量取的值是所有的實數，我們便不能像上面那般列表來描述該變量了。不過在這一章裏，為了簡化說明，為了不涉及微積分的計算，我們討論的隨機變量，幾乎都是可列表來描述的。

對一個隨機變量觀察很多很多次，便可以計算它的平均值。雖然變量每次取什麼值蘊含了偶然性，但這個平均值卻是相當穩定的（見第一章）。怎樣用理論方法來計算這個穩定的平均值呢？

假定我們用下面的表（見表 6.2）來描述隨機變量 X，我

們把 $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$ 叫做 X 的「數學期望值」（Expected Value），記作 E(X)。可以證明，當觀察次數足夠多時，隨機變量的平均值通常很接近它的數學期望值。由於這

X 取的值	x_1	x_2	……	x_n
概率	p_1	p_2	……	p_n

表 6.2

個原因，計算數學期望值是研究隨機變量的一個重要步驟。知道它的數學期望值，我們便知道該變量在長期觀察底下，平均大小如何了。在比較兩個隨機變量 X 和 Y 時，計算它們的數學期望值更有用了。因為有時 X 取值比 Y 取值大，有時 X 取值比 Y 取值小，很難就此比較。最有效的方法，就是看看在多次觀察中誰的平均值較大，也就是說，比較它們的數學期望值。

你們或者會問，既然變量取的值是 x_1，…，x_n，而數學期望值應該大致等於平均值，為什麼它不是$(x_1 + \ldots + x_n)/n = x_1/n + \ldots + x_n/n$ 呢？但我們要注意一件事，x_1，…，x_n，這 n 個值出現的機會，是不均等的。出現次數較多的值應該較受重視，出現次數較少的值應該佔較輕份量。讓我們取兩個簡單的隨機變量 X 和 Y 為例（見表 6.3），它們都只取值 1 或 2。

X 取的值	1	2
概率	0.1	0.9

Y 取的值	1	2
概率	0.9	0.1

表 6.3

但 X 取值 2 的機會極大，取值 1 的機會極小，反之，Y 取值 1 的機會極大，取值 2 的機會極小。我們不能把它們的期望值都當是$(1 + 2)/2 = 1.5$。對 Y 來說，在十次觀察，平均有九次是 1，一次是 2，所以我們期望 Y 的平均值是$(9 \times 1 + 1 \times 2)/10 = 0.9 \times 1 + 0.1 \times 2 = 1.1$。事實上，X 的數學期望值是 1.9，Y 的數學期望值是 1.1。

例一：黃胖警官的射擊術

黃胖警官的射擊術還不算太差，發第一槍已經有八成機會中靶。而且如果第一槍不中，再瞄準發第二槍，命中率有九成。如果仍然不中，他發第三槍必定中的。現在他要射 10 具靶，你估計他要發多少槍呢？先看第一槍便中的，概率是多少？答案是 0.8。再看兩槍才中的，概率是多少？答案是$(1-0.8)\times 0.9 = 0.18$（為甚麼？）最後看三槍才中的，概率是多少？答案是$1-0.8-0.18=0.02$（為甚麼？）如果 X 是發槍次數，它的數學期望值 $E(X)$就是 $1\times 0.8+2\times 0.18+3\times 0.02=1.22$，即是說射中一具靶黃警官大概要發 1.22 槍（當然，X 只能是 1 或 2 或 3，但 1.22 是個期望值，所以不一定是個整數。）把 10 個 X 加起來，得到另一個隨機變量 Y，就是射中 10 具靶發槍次數了。可以證明，$E(Y)$就是把 10 個 $E(X)$加起來，所以射中 10 具靶發槍次數的期望值是 12.2，即是說黃胖警官大概要發 12.2 槍便可以射中 10 具靶。在實際情形，他發 12 槍或 13 槍便可以，他準備 15 發子彈應該很足夠，因為他需要使用多於 15 發子彈的機會是很小的。你若有興趣，不訪試計算一下，黃胖警官射 10 具靶需要發多於 15 槍的機會是不是真的很小？（答案是 0.02199……）

例二：倒扣多少分?

李老師喜歡在考試中擬選擇題，但他知道有些學生即使不懂那個才是正確答案也會亂撞一通，隨便選一個答案，以圖僥倖。為了對這種不良作風加以處罰，唯一辦法就是對每一個錯誤的答案倒扣若干分。通常每條選擇題有五個答案，只有一個是正確的。在某次考試中，李老師共擬 20 題，每題 5 分，滿分是 100 分。他決定對每一個錯誤答案倒扣若干分，但應該倒扣多少分才合理呢？倒扣太多對學生不公平，但倒扣太少又起不

了阻嚇作用。倒扣的分數，應該恰到好處，使亂撞一通的學生一無所獲。換句話說，如果學生完全靠運氣的話，他的總分的數學期望值應該是 0。

假定對一個錯誤答案倒扣 x 分，而正確答案得 5 分。隨意選一個答案，選着錯誤答案的概率是 $^4/_5$，選着正確答案的概率是 $^1/_5$，所以總分的數學期望值是$(5\times {}^1/_5 - x\times {}^4/_5)\times 20$。要它是 0，即是要 $5-4x=0$，由此 $x={}^5/_4=1.25$，即是對每一個錯誤答案應該倒扣 1.25 分。要是這樣辦，對一個只答對六成的學生（但不是亂撞一通之流）來說，他的總分仍然有 $5\times 12-1.25\times 8=50$，並不算不公平吧？

例三：值回票價乎？

你們記得世界乒乓球錦標團體賽的辦法嗎？雙方賽九局，誰先取得五局勝利便得冠軍（見第五章例六）。乒乓球迷小黑子觀看某屆決賽，賽事以 5 比 3 終場，在回家的路上小黑子對夥伴說：「這次看了 8 局，認真夠味，可謂值回票價有餘！」小黑子對概率不大了解，但他這句話卻說對了。讓我們分析一下吧。假定小黑子年年觀看決賽，又假定每年決賽隊伍的實力旗鼓相當，那麼平均他每年看了多少局呢？也就是說，比賽局數的期望值是多少？我們計算一下（見第五章例六），便知道賽五局（比數是 5 比 0）的概率是 0.06250，賽六局（比數是 5 比 1）的概率是 0.15625，賽七局（比數是 5 比 2）的概率是 0.234375，賽八局（比數是 5 比 3）的概率是 0.2734375，賽九局（比數是 5 比 4）的概率是 0.2734375。比賽局數不會少於五也不會多於九，所以期望值是

$$5\times 0.0625+6\times 0.15625+7\times 0.234375$$
$$+8\times 0.2734375+9\times 0.2734375$$
$$=7.539\ldots\ldots。$$

如果兩隊實力不是旗鼓相當，這期望值將會減小。直覺上的理解，就是強方以大比數勝弱方的機會增大了，所以比賽局數的期望值應該更小。現在小黑子看了八局，比期望的7.539……來得多，難怪他說值回票價有餘！

例四：整體試驗的好處

在第五章例三中，我們說明怎樣把多人的血液樣本混在一起來化驗，用比較少的化驗次數（100 次）去估計一萬人中患病者的百分比。但更多時候，我們不單只希望估計百分比，我們還想知道那一萬人中誰是患病者。這樣的話，是否除了逐個化驗以外，別無他途呢？逐個化驗，要進行一萬次化驗，能否利用整體試驗（即是把多人的血液樣本混在一起來化驗）來減少化驗的次數呢？

為了方便說明，我們只看一個簡單的情形，只考慮兩個人，要檢驗誰患病誰沒患病。有以下兩個辦法：（甲）把兩個人的血液樣本分別化驗。這樣做要進行兩次化驗。（乙）把兩個人的血液樣本混在一起化驗，如果樣本呈陰性反應，便知道兩人也沒有患病，如果樣本呈陽性反應，便知道至少其中有一人患病，這時才再分別化驗。這樣做，有時進行一次化驗，有時進行三次化驗。

初看起來，很難比較（甲）好還是（乙）好。用（甲）一定要化驗兩次，用（乙）可能要化驗三次也可能只要化驗一次。在這種情形下，只好計算每個方法的化驗次數的數學期望值了。（甲）的化驗次數期望值是 2（為什麼？）假定每人患病的概率是 P，也假設每人患病與否並不影響另一人患病與否（如果是傳染病而這兩個人又住在一起的話，便不適宜作這假設了），那麼兩人也沒患病的概率是$(1-P)^2$，這時只要化驗一次。兩人中至少有一人患病的概率是 $1-(1-P)^2 = 2P-P^2$，這

時要化驗三次。所以（乙）的化驗次數期望值是 $1 \times (1 - P)^2 + 3 \times (2P - P^2) = 1 + 4P - 2P^2$。如果 $1+4P - 2P^2$ 小於 2，（乙）比（甲）好，反之則（甲）比（乙）好。懂一點代數便容易知道，只要 P 小於某數（是什麼？）$1 + 4P - 2P^2$ 便小於 2，即是說當 P 小時，（乙）比（甲）好。舉一個例子，設 P 是 0.1，那麼甲的化驗次數期望值是 2，而（乙）的化驗次數期望值只是 1.38 吧！

例五：「聖彼得堡奇論」

在 1713 年，瑞士數學家 N．伯努利(Nicolaus Bernoulli)給另一位數學家蒙謨(Montmort)的信上，提出一個有趣的問題：拋一枚均勻錢幣，如果第一次出現人像，便贏一文錢。如果第一次不出現人像，第二次才出現人像，便贏兩文錢。如果第一次和第二次都不出現人像，第三次才出現人像，便贏四文錢。如果第一次、第二次、第三次都不出現人像，第四次才出現人像，便贏八文錢。每次贏錢數目加倍，照這規矩玩下去，玩的人起初應付多少錢才合理呢？

所謂合理，是指玩的人應該先付一筆相當於他期望贏得到的錢。比方他期望贏十文錢，他便先付十文錢，那麼有時他取回少於十文錢（於是「賭場」便贏了），有時他取回多於十文錢（於是「賭場」便輸了），然而平均來說，雙方沒輸沒贏。讓我們計算這個伯努利遊戲的贏錢數目期望值吧，這次跟以前的例子有點不同，要把無限多項加起來（不熟悉無窮級數的讀者，可以把它看作是很多很多項的和，答案越來越接近某個數值），就是

$$1\times\left(\tfrac{1}{2}\right)+2\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+8\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^4+\cdots\cdots$$
$$=\left[1+2\times\left(\tfrac{1}{2}\right)+4\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+8\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\ldots\ldots\right]/2$$
$$=[1+1+1+1+\cdots\cdots]/2。$$

那豈不是說玩的人應該先付一筆無限大的錢嗎？直覺地想像，這遊戲怎麼會值一筆無限大的錢呢？通常拋幾次便出現人像的，所以通常玩的人只取回幾文錢而已，為什麼要先付一大筆錢，更遑論一筆無限大的錢了！這個奇怪的計算結果，是伯努利在聖彼得堡科學院時提出的，所以後來被稱為「聖彼得堡(St. Petersburg)奇論」，引起不少數學家的注意。伯努利不幸英年早逝，他的弟弟 D．伯努利(Daniel Bernoulli)繼任他的職位，並且在 1738 年提出一個對「聖彼得堡奇論」的解答。為此他引進一種新的期望值概念，不過這概念後來沒有受普遍重視，在概率論的發展過程中也沒有起重大的作用，我們也就不談它了。不如讓我們討論另一個合理的解釋吧，那是基於一項合理的假設：「賭場」不可能付出一筆無限大的錢，「賭場」頂多只能付出若干。譬如說（為方便計算）賭場只能付 $8 = 2^3$ 文錢，即使玩的人拋多於 4 次才出現人像，他也只取回 8 文錢而已。這樣的話，贏錢數目的期望值只是

$$1\times\left(\tfrac{1}{2}\right)+2\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+8\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^4+8\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^5+\cdots\cdots$$
$$=[1+1+1+1]/2+8\times\left[1+\left(\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\ldots\ldots\right]/2^5$$
$$=4\times\left(\tfrac{1}{2}\right)+8\times2\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$
$$=2.5$$

所以，玩的人先付 2.5 文錢便可以，因為平均他只贏 2.5 文錢吧。更一般地，如果「賭場」只能付 2^m 文錢，贏錢數目的期望值也只不過是(m + 2)／2。當 m 是 40 時，2^m 已經超過一萬億，但玩的人也只需先付 21 文錢吧！

例六：重男輕女和人口膨脹

在現代社會裏，仍然有不少頭腦守舊的父母，以沒有生得男孩子為憾事。以下是一個假想情況：H 市的重男輕女風氣很盛，所有父母都非要生得男孩子不可。但市政府又害怕人口膨脹，所以有人在立法局會議上提出下面的動議：「每對夫婦可以生育，直至有一名男孩子，之後便要絕育了。」這動議在立法局會議上引起激烈的辯論，辯論的主題是：（1）通過動議會不會導致人口膨脹？（2）通過動議會不會導致男多於女？圍繞着（1）有正反兩方面的意見：（1 甲）新法例鼓勵那些只有女孩子的夫婦繼續生育，家庭人口越來越多，不符合「一個嬌，兩個妙，三個吃不消，四個斷擔挑」的原則。（1 乙）在新法例下，很多一索得男的家庭不再繼續生育，人口不但不膨脹，甚至會減少呢！圍繞着（2）也有正反兩方面的意見：（2 丙）在新法例下，每個家庭都一定有男孩子，但卻不一定有女孩子，這樣會導致男多於女。（2 丁）實行新法例後，有不少家庭有很多女孩子，導致女多於男。

你們對（1）和（2）有什麼意見呢？現在讓我們運用概率論的知識來結束這場辯論吧。如果實行新法例，又假設每對夫婦都能生育，一個家庭的子女數目便是個隨機變量 X，它取值 1，2，3，……。如果這對夫婦一索得男，他們便不再生育，所以 X 取值 1。也即是說，「X 是 1」這事件發生的概率是 P，這裏的 P 是生男孩子的概率，$1-P$ 是生女孩子的概率。什麼時候 X 取值 2 呢？就是當第一胎是女嬰而第二胎是男嬰的情況，概率是 $(1-P)P$。即是說，「X 是 2」這事件發生的概率是 $(1-P)P$。由此類推，「X 是 K」這事件發生的概率是 $(1-P)^{K-1}P$。現在我們可以討論（1）了，讓我們來計算平均每個家庭有多少名子女，即是計算 X 的數學期望值。由公式我們知道

$$
\begin{aligned}
&E(X)\\
&=1\times P+2\times P(1-P)+3\times P(1-P)^2+\cdots\cdots\\
&=P\times\left[1+2\times(1-P)+3\times(1-P)^2+\cdots\cdots\right]\\
&=\frac{P}{\left[1-(1-P)\right]^2}\quad\text{(見註)}\\
&=\frac{1}{P}
\end{aligned}
$$

如果設 $P = {}^1\!/_2$ ，便有 $\mathrm{E}(X) = 2$ ，即是平均每個家庭有兩名孩子，動議並不會導致人口膨脹。現在讓我們來解答（2），設一個家庭中男孩子數目是 B，女孩子數目是 G，那麼顯然 $X = B + G$ 和 $B = 1$（這是實行新法例的後果）。所以 $X = 1 + G$，而 $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(1) + \mathrm{E}(G)$，即是 $2 = 1 + \mathrm{E}(G)$，因而 $\mathrm{E}(G) = 1$ 。即是說平均每個家庭有一名男孩子和一名女孩子，所以動議不會導致男多於女，也不會導致女多於男。

你若有興趣，可討論 $P \neq {}^1\!/_2$ 的情況，或更一般地，設 P 和 Q 各為生男孩子和女孩子的概率，而且 $P + Q = 1 - R$，R 是一對夫婦不育的概率，看看結果有什麼不同。

（註）如果 x 是個在 -1 和 1 之間的數，那麼 $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots = 1／(1 - x)^2$ （你懂得怎樣證明嗎？如果你不熟悉無窮級數，只好暫時接受這答案了。）

例七：問題知多少？

李老師擬的一道選擇題，有（1）、（2）、（3）、（4）四個可能的答案。小明不懂那個才是答案，央求李老師告訴他。李老師說：「我不能直接告訴你，但你可以向我發問，我只回答是或否，希望你問盡量少的問題。」如果你是小明，你會怎樣發問呢？最簡單的方法，就是先問：「答案是（1）嗎？」如果李老師答「是」，便不必問下去，因為（1）就是答案。如果李老師答「否」，便繼續問：「答案是（2）嗎？」如果李老師答「是」，便不必問下去，因為（2）就是答案。如果李老師答「否」，便繼續問：「答案是（3）嗎？」如果李老師答「是」，（3）就是答案。如果李老師答「否」，（4）就是答案。可以用下面的圖來表示這個問法（見圖 6.4）。以上的問法最少要問一個問題，最多要問三個問題。讓我們計算一下，小明平均要

圖 6.4

問多少個問題，才可以知道答案呢？我們首先要知道，在各種不同情況下，小明要問多少個問題，下面的表列出各種不同的情況和它們出現的概率（見表 6.5）。小明問題數目的期望值是

答案	概率	要問多少條問題?
(1)	$1/4$	1
(2)	$1/4$	2
(3)	$1/4$	3
(4)	$1/4$	3

表 6.5

$1 \times (^1/_4) + 2 \times (^1/_4) + 3 \times (^1/_4) + 3 \times (^1/_4) = {}^9/_4$。有沒有更好的問法呢？有的，小明可以先問：「答案是（1）或（2）嗎？」如果李老師答「是」，便繼續問：「答案是（1）嗎？」如果李老師答「否」，便繼續問：「答案是（3）嗎？」這樣問法，也能知道答案，可以用下面的圖來表示（見圖 6.6）。最多只要問兩個問題，便知道答案。

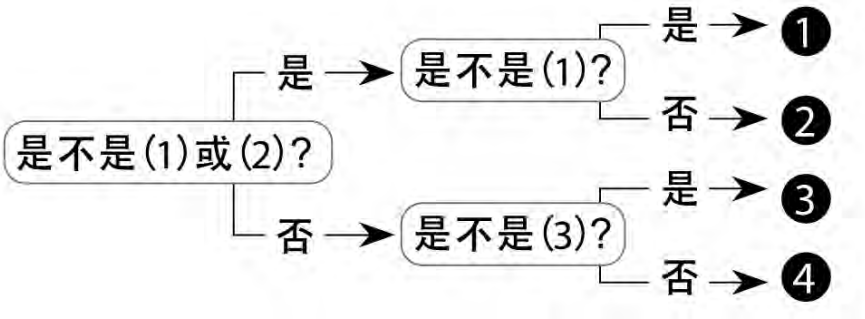

圖 6.6

事實上，無論答案是什麼，這個問法至少也要問兩個問題，才可以知道答案。所以，用這個問法，小明問題數目的期望值是 2。你看，2 不是小於 $^9/_4$ 嗎？也就是說，第二個問法比前一個更有效。

例八：那年雨量最多？

大家還記得每隔四天才供水四小時的苦況嗎？每年雨量多少對香港居民的日常生活有很大的影響。如果我們觀察過去歷年的雨量紀錄，便會留意到，某幾年雨量之多（少）是創過去歷年的紀錄。比方（見表 6.7）1951 年至 1980 年間，1957 年的雨量紀錄是 2950.3 毫米，是過去歷年（指 1951 年至 1957 年）的最高紀錄，到了 1973 年這個紀錄給刷新了，因為那年的雨量紀錄是 3100.4 毫米，這個最高紀錄至今仍然維持。又比方 1953 年的雨量紀錄是 2360.2 毫米，是過去歷年（指 1951 年至 1953 年）的最低紀錄，但翌年這個紀錄便給刷新了，因為 1954 年的雨量紀錄是 1367.0 毫米。直至 1963 年這個最低紀錄再給

刷新，那年的雨量紀錄是 901.1 毫米。這個最低紀錄，至今仍然維持（但願一直如是！）。

（數據摘自香港天文台供給的氣象資料）

在競技場上常常出現刷新紀錄的情形，甚至有些運動員還豪氣干雲地說：「創新紀錄只為了要再刷新！」遇到刷新紀錄的情形，我們只會感到敬佩，卻不會感到驚訝，然而換了是雨量頻創新低點，在擔憂之餘，我們一定會懷疑，天氣是否越來越旱呢？換句話說，我們相信，如果天氣乾旱程度不變的話，新低點是不可能出現得太頻密的。每年的雨量是個隨機變量，所謂乾旱程度不變，就是說這個隨機變量的期望值是一個常數，不隨年份而變動，在這樣的假設底下，我們期望雨量創新高（低）點這一個偶然現象會有一定的穩定性。譬如問，一個 70 歲的人，在他有生之年，你猜他大概會見到多少次雨量創最高（低）記錄呢？要回答這個問題，又要計算數學期望值了。假定 $X(N)$是在 N 年內雨量創最高（低）紀錄的次數，我們打算計算 $\mathrm{E}(X(N))$。讓我們引入一種新的手法，就是定義一個新的隨機變量 $Y(N)$，它只取值 0 或 1，當第 N 年雨量創最高（低）紀錄時 $Y(N)$是 1，否則 $Y(N)$是 0。

這樣的話，$X(N) = X(N-1) + Y(N)$，於是 $\mathrm{E}(X(N)) = \mathrm{E}(X(N-1)) + \mathrm{E}(Y(N))$。但 $\mathrm{E}(Y(N))$是什麼呢？原來那是很易計算的，$\mathrm{E}(Y(N))$只不過是 $1 \times P + 0 \times (1-P) = P$，其中 P 就是第 N 年雨量創最高（低）紀錄的概率。下雨最多（少）的一年，可以是過去 N 年內任何一年（這兒用了什麼假設呢？），只有當第 N 年下雨最多（少），第 N 年的雨量紀錄才會創最高（低）紀錄，所以 $P = {}^{1}/_{N}$。由此，

$$E(X(N)) = E(X(N-1)) + 1/N$$

$$E(X(N-1)) = E(X(N-2)) + 1/(N-1)$$

……

年份	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
總雨量(mm)	2363.9	2544.3	2360.2	1367.0	2350.2	1649.3	2950.3	2033.6	2797.4	2237.0

年份	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
總雨量(mm)	2232.4	1741.0	901.1	2432.1	2352.6	2398.2	1570.6	2288.2	1895.5	2316.3

年份	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
總雨量(mm)	1903.8	2807.3	3100.4	2322.9	3028.7	2197.2	1680.0	2593.0	2614.7	1710.6

表 6.7

餘此類推，直至

$E(X(2)) = E(X(1)) + {}^{1}/_{2}$。

但 $E(X(1)) = 1$（為什麼？），

所以 $E(X(N)) = 1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} + \ldots\ldots + {}^{1}/_{N}$

就拿香港從 1951 年至 1980 年這 30 年內的每年雨量紀錄來看吧。按上述計算，期望有 $1 + {}^{1}/_{2} + \ldots + {}^{1}/_{30} = 3.99\ldots\ldots$年創最高（低）紀錄。查看數據（見表 6.7），發現有 4 年雨量創最高紀錄，即是 1951 年、1952 年、1957 年和 1973 年。也有 4 年雨量創最低紀錄，即是 1951 年、1953 年、1954 年和 1963 年。這跟我們先前的計算結果，不是很符合嗎？假定一個人的平均壽命是 70 歲，那麼因為 $1 + {}^{1}/_{2} + \ldots + {}^{1}/_{70}$ 差不多是 5，他大概見到 5 次雨量創最高（低）紀錄。

例九：能否同偕白首？

某市的居民，老人為數不少。其中有 500 對夫婦，男的是 75 歲，女的是 70 歲。根據該市人口壽命的統計數字，我們知道 75 歲的老年男人中，百分之六十會在五年內死亡，而 70 歲的老年女人中，百分之三十會在五年內死亡。你猜五年後這 500 對夫婦有多少對仍能同偕白首呢？

我們先看一對夫婦的情形，計算這對夫婦五年後仍能同偕白首的機會。換句話說，即是要計算五年後他們兩人仍然一同

活着的概率。由於男的能活多過五年的概率是 0.4，女的能活多過五年的概率是 0.7，所以五年後他們仍能同偕白首的概率是 $0.4 \times 0.7 = 0.28$（我們作了一個什麼樣的假設呢？）。現在有 500 對這樣的夫婦，所以期望有 $0.28 \times 500 = 140$ 對夫婦五年後仍能同偕白首。

第七章

條件概率是甚麼？

袋裏有三個球，其中一個是紅球，一個是白球，另一個不知道是什麼顏色的。隨意抽一個，它是紅球的概率是多少？如果第三個球是紅色的，抽着紅球的概率是 $^2/_3$，如果第三個球不是紅色的，抽着紅球的概率是 $^1/_3$。既然第三個球只能是紅色或者不是紅色，這兩個事件是互不相容，所以抽着紅球的概率是 $^2/_3 + {}^1/_3 = 1$，也就是說，抽着的一定是紅球！那怎麼會呢？這結論顯然是不合理的，但出錯在哪兒？仔細把論證再察看一遍，便知道那個 $^2/_3$ 和 $^1/_3$ 是事件在不同條件底下會發生的概率。所以，要計算抽着紅球的概率，我們不應該把 $^2/_3$ 和 $^1/_3$ 就此加起來。要進一步弄清楚這個問題，必須先談談什麼叫做「條件概率」（Conditional Probability）。讓我們繼續以袋和球為例來解釋這回事吧！假設袋裏有兩個黑球和一個白球，隨意抽一個，看看是什麼顏色，不再把它放回袋裏，接着又隨意抽一個，看看是什麼顏色。如果已經知道第一次抽着黑球，問第二次抽着黑球的概率是多少？既然已經抽着一個黑球，袋裏只剩下一個黑球和一個白球，任何一個都有同樣可能性被抽着，所以答案是 $^1/_2$。怎樣用樣本空間的語言來解釋這回事呢？像以前一樣（見第五章），我們用數偶（a, b）表示兩次抽球的結果（記得 1 號和 2 號是黑球，3 號是白球），於是樣本空間 S 有 6 個元素，就是 s_1＝（1, 2），s_2＝（1, 3），s_3＝（2, 1），s_4＝（2, 3），s_5＝（3, 1），s_6＝（3, 2）（見圖 7.1）。A 是「第二次抽着黑球」這個事件，B 是「第一次抽着黑球」這個事件。我們要計算在 B 發生的條件底下 A 的概率，叫做「條件概率」，記作 P(A | B)。要注意一件事，這概念只有當 $P(B) \neq 0$ 時才有意思，

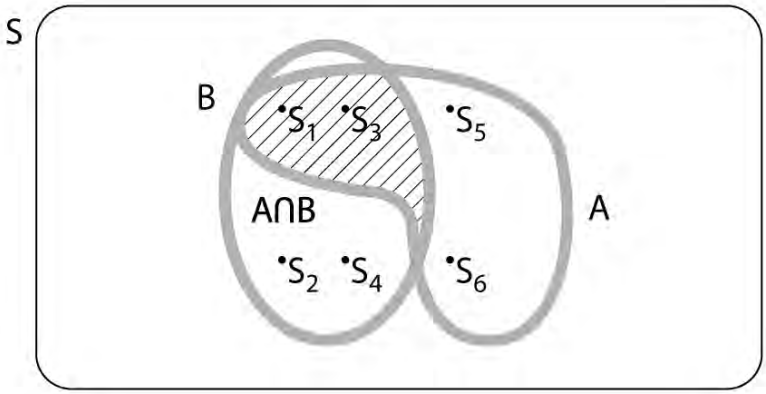

圖 7.1

否則如果 B 根本不能發生，還討論什麼在 B 發生的條件底下 A 的概率呢？從圖中容易看到（見圖 7.1），因為已經肯定了 B 發生，我們便應該把注意力從 S 縮窄至 B 的範圍，從而對 A 也只需要理會 $A \cap B$ 這部分而已。由於 $A \cap B$ 有 $P(A \cap B) \times 6$ 個元素，B 有 $P(B) \times 6$ 個元素，所以根據概率的古典定義，

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B) \times 6}{P(B) \times 6}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6} \Big/ \frac{4}{6} = \frac{1}{2} \text{。}$$

即使在一般情形下（不單是等可能性的情形），上面的概率公式仍然成立的，就是說

$$P(A \mid B)\, P(B) = P(A \cap B)\text{。}$$

在這一章裏我們常常碰上它，有時更會碰上它的「變着」，叫做「全概率公式」（Law of Total Probability），是這樣子的：假設事件 A 僅當 n 個互不相容的事件 B_1，B_2，……，B_n 中任一事件發生時它才可能發生，那麼

$$P(A) = P(A \mid B_1)\, P(B_1) + \ldots\ldots + P(A \mid B_n)\, P(B_n)\text{。}$$

原因是 A 由 n 個互不相容的事件 $A \cap B_1$，……，$A \cap B_n$ 組成，對每個我們可用條件概率公式。下面的圖（見圖 7.2），或者可

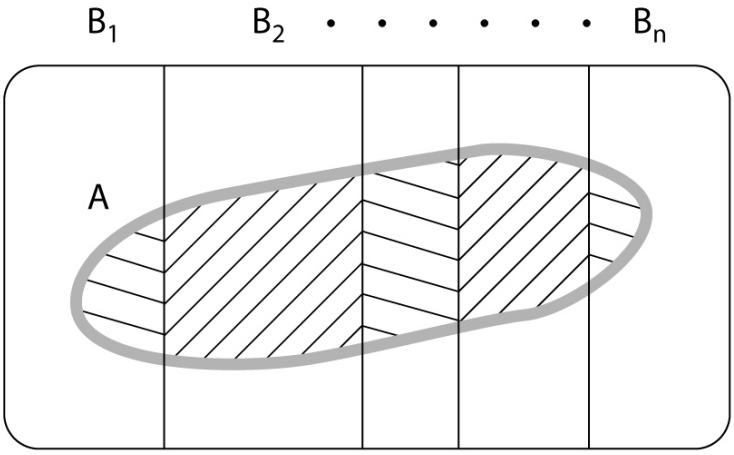

圖 7.2

以幫忙理解。舉一個例子，設 A 是「第二次抽着黑球」這個事件，B 是「第一次抽着黑球」這個事件，C 是「第一次抽着白球」這個事件。根據「全概率公式」便有

$$P(A) = P(A \mid B)\,P(B) + P(A \mid C)\,P(C)$$
$$= {}^{1}/_{2} \times {}^{2}/_{3} + 1 \times {}^{1}/_{3} = {}^{2}/_{3}\text{。}$$

（你有沒有注意到，這答案跟第一次抽球後把它放回去才再抽的情形是一樣呢？把第一次抽着的球放回袋裏才抽第二次，抽着黑球的概率也是 $^{2}/_{3}$。在那情形下，A 和 B 是獨立事件，A 和 C 是獨立事件，答案是 $^{2}/_{3}$ 不足為奇。有趣的是當 A 和 B、A 和 C 都並非是獨立事件而答案仍然是 $^{2}/_{3}$，會不會只是巧合呢？請看第二章例三。）

好了，我們可以回頭看看這章開首提出的問題了。假設 P 是「第三個是紅球」的概率，那麼根據「全概率公式」便知道「抽着紅球」的概率是 ${}^{2}/_{3}P + {}^{1}/_{3}\,(1 - P) = {}^{1}/_{3}\,(1 + P)$。

除非我們知道 P 是什麼，否則我們沒辦法計算得到答案。不過，因為 P 是個 0 至 1 之間的數，所以答案不大於 $^{2}/_{3}$，也不小於 $^{1}/_{3}$。譬如說，第三個球是在一個紅球、一個黃球、一個藍球當中隨意抽一個的話，那麼 P 是 $^{1}/_{3}$，答案便是 $^{4}/_{9}$ 了。

明白了條件概率之後，我們可以更好地解釋獨立性的意

義。如果事件 B 發生與否並不影響事件 A 的概率，便有 $P(A \mid B) = P(A)$，因此 $P(A \cap B) = P(A \mid B)\,P(B) = P(A)\,P(B)$。注意這式子是對稱的，即是說，$P(B \cap A) = P(B)\,P(A)$也成立，所以也有 $P(B \mid A) = P(B)$，即是說事件 A 發生與否並不影響事件 B 的概率。因此，我們有理由作下面的定義：如果兩個事件 A、B 中任一事件發生與否並不影響另一事件的概率，即是 $P(A \mid B) = P(A)$ 或者 $P(B|A) = P(B)$，便稱它們為「獨立事件」（Independent Events）。對於獨立事件 A、B 成立公式 $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$，反之亦然。譬如前面討論過的兩次抽球實驗，第一次抽的球不放回去，$P(A \cap B) = {}^{1}/_{3}$，而 $P(A) = P(B) = {}^{2}/_{3}$，所以 $P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B)$，即是說 A 和 B 不是獨立的。但如果把第一次抽着的球放回去才抽第二次，$P(A \cap B) = {}^{4}/_{9}$（為甚麼?）而 $P(A) = P(B) = {}^{2}/_{3}$，所以 $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$，即是說 A 和 B 是獨立的。小心的讀者，會留意到上面的解釋中，因為用了條件概率，首先必須假設 $P(A) \neq 0$ 和 $P(B) \neq 0$。如果 $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$，又怎樣呢？對於 $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$ 的情形，我們仍然稱 A、B 為獨立事件，因為 $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ 仍然成立，只不過兩邊都等於零吧。你不妨試證明，如果 A 和 B 互不相容，它們便不是獨立的，除非其中一個是不可能事件。

例一：兩所醫院的死亡率

陳醫生翻查兩所醫院（簡稱 A 和 B）的年報，發現如下統計數字（見表 7.3）：

	醫院 A	醫院 B
動手術後康復人數	916	1880
動手術後死亡人數	84	120
動手術的總人數	1000	2000

表 7.3

於是他計算一下每所醫院病人動手術後的死亡率。醫院 A 有 1000 人要動手術，當中有 84 人死亡，死亡概率為 P_A(死亡) = 84／1000 = 0.084，醫院 B 有 2000 人要動手術，當中有 120 人死亡，死亡率為 P_B(死亡) = 120／2000 = 0.060。由於醫院 B 的死亡率較低，陳醫生認為醫院 B 動手術的技術比醫院 A 來得高明，於是把自己的病人都介紹到醫院 B 去了。

另一位黃醫生卻比較細心，他把上面的數據再作深入分析，發現在醫院 A 要動手術的 1000 名病人中，有 800 名要動大手術，200 名動小手術，而死亡人數分別是 80 和 4（見表 7.4(a)）。在醫院 B 要動手術的 2000 名病人中，有 500 名要動大手術，1500 名動小手術，而死亡人數分別是 60 和 60（見表 7.4(b)）。於是黃醫生計算一下每種手術的死亡率，得答案如下：

	大手術	小手術	總數
動手術後康復人數	720	196	916
動手術後死亡人數	80	4	84
動手術的總人數	800	200	1000

（a）醫院 A

	大手術	小手術	總數
動手術後康復人數	440	1440	120
動手術後死亡人數	60	60	120
動手術的總人數	500	1500	2000

（b）醫院 B

表 7.4

醫院 A－

P_A(死亡｜大手術) = 80／800 = 0.1

P_A(死亡｜小手術) = 4／200 = 0.02

醫院 B－

P_B(死亡｜大手術) = 60／500 = 0.12

P_B(死亡｜小手術) = 60／1500 = 0.04

由此可見對大手術而言，醫院 A 的死亡率較低。對小手術而言，也是醫院 A 的死亡率較低。於是黃醫生認為醫院 A 比醫院 B 好，便把自己的病人都介紹到醫院 A 去了。

你認為那一位醫生的見解才是正確呢？事實上，他們兩人的計算都沒有錯誤。黃醫生發現對每種手術而言，醫院 A 的死亡率較醫院 B 的死亡率低。陳醫生發現，總的來說，醫院 B 的死亡率較醫院 A 的死亡率低。雖然這看起來似乎是互相矛盾，但從上面的數字，可知那的確能夠發生的。怎樣解釋這個「似非而是」的現象呢？讓我們作進一步計算，看看兩所醫院動大手術的概率。醫院 A 的 1000 名病人中有 800 名要動大手術，所以 P_A(大手術) = 0.8。醫院 B 的 2000 名病人中有 500 名要動大手術，所以 P_B(大手術) = 0.25。由此可見，醫院 A 主要是動大手術，醫院 B 主要是動小手術。雖然醫院 B 的總死亡率比醫院 A 的總死亡率低，那只不過因為醫院 B 的病人比醫院 A 的病人的病情是較輕吧。事實上，對每種手術而言，醫院 A 的表現都比醫院的 B 表現為佳。陳醫生只分析了表面現象，卻忽略了病人的成份，所以他的結論也是表面的。黃醫生的分析比較深入，他的結論是正確的。如果用全概率公式，便知道

P_A(死亡) = P_A(死亡｜大手術) P_A(大手術)
+ P_A(死亡｜小手術) P_A(小手術)
P_B(死亡) = P_B(死亡｜大手術) P_B(大手術)
+ P_B(死亡｜小手術) P_B(小手術)

換句話說，P_A(死亡) 是類似 P_A(死亡｜大手術) 和 P_A(死亡｜小手術) 的「平均」，只是在這「平均」中，某部分比另一部分佔更重份量，所以我們稱它為「加權平均」(Weighted Average)。同樣道理，P_B(死亡) 是 P_B(死亡｜大手術) 和 P_B(死亡｜小手術) 的加權平均。雖然，P_A(死亡｜大手術) 小於 P_B(死亡｜大手術)，P_A(死亡｜小手術) 小於 P_B(死亡｜小手術)，但由於權數（Weight）不同，P_A(死亡) 卻不一定小於 P_B(死亡) 的。

例二：技巧的調查訪問

訪問員進行調查工作時，常碰到一個困難，就是被訪者不據實作答。尤其當問及一些比較敏感的問題時，就更加不容易得到真實的答覆了。有不少人認為在一個陌生人面前回答一些敏感的問題，是很尷尬的一回事。為了克服這點困難，統計學家設計了一套調查訪問技巧，名叫「隨機作答技巧」（Randomized Response Technique）。

陳先生正在接受訪問，訪問員對他說：「我這兒有甲、乙兩個問題：（甲）你月入高於 1000 元嗎？（乙）你月入低於或等於 1000 元嗎？如果你是在一月至八月出生的，請回答（甲），否則便請回答（乙）。由於我不知道你的生日，我不知道你是在回答哪一個問題的，請你放心作答好了。」陳先生月入 2000 元，他的生日是十月十七日，所以他回答（乙），答案是「不」。他作答時十分放心，因為雖然他答「不」，訪問員可不知道他指的是「不高於 1000 元」抑或「不低於或等於 1000 元」。訪

問員共訪問了 1000 戶，有 400 戶答「不」，600 戶答「是」。

你會問，雖然以上方法可以鼓勵被訪者據實作答，但既然訪問員不知道對方回答哪一個問題，單單知道有四成被訪者答「不」又有什麼用呢？怎樣由此估計有多少戶月入高於 1000 元呢？利用全概率公式，我們知道

P(不) = P(不｜問題甲) P(問題甲) + P(不｜問題乙) P(問題乙)。

在上式中，P(不)表示回答「不」的概率（不論對方是回答問題甲或問題乙），P(不｜問題甲)表示如果對方回答問題甲而答案是「不」的概率，P(問題甲)表示對方回答問題甲的概率，其餘類推。現假設一戶月入高於 1000 元的概率是 P，那麼 P(不｜問題甲)是 $1-P$，P(不｜問題乙)是 P。由調查結果，我們知道 P(不)是 400／1000 = 0.4。由於在一月至八月出生的人，大概佔總人口的 $^{8}/_{12} = {}^{2}/_{3}$，所以在 1000 戶中大概有 $^{2}/_{3}$ 回答問題甲，也就是說 P(問題甲)是 $^{2}/_{3}$。同樣道理，P(問題乙)是 $^{1}/_{3}$。（在這裏我們對一個人的出生月份作了一點假設，是什麼呢？）代入全概率公式，便得到 $0.4 = (1-P)\times{}^{2}/_{3} + P\times{}^{1}/_{3}$，即是 P／3 = 0.266……，因而 P = 0.7999……。所以調查結果顯示，差不多有八成戶主是月入高於 1000 元的。

例三：藏有金幣的箱子

有三個箱子，叫做 A、B、C，每個箱子有兩個抽屜。在箱子 A 的兩個抽屜裏各放置一枚金幣，在箱子 B 的兩個抽屜裏各放置一枚銀幣，在箱子 C 的兩個抽屜裏，一個放置一枚金幣，一個放置一枚銀幣。隨意選一個箱子，隨意打開箱子的一個抽屜，如果發現那裏放置了一枚金幣的話，另外那個抽屜裏也放置了一枚金幣的概率是多少呢？

既然發現抽屜裏放置了金幣，箱子只可能是 A 或 C。如果是箱子 A，另一枚必定是金幣。如果是箱子 C，另一枚必定不

是金幣。因為選着 A 或 C 的機會均等，所以答案是 $^1/_2$。你認為對不對呢？

設 E 是「另一枚是金幣」這個事件，F 是「有一枚是金幣」這個事件，我們要計算的是 P(E｜F)。根據定義 P(E｜F) P(F) = P(E∩F)，而 P(E∩F)就是兩枚也是金幣的概率，亦即是選着箱子的概率，因此 P(E∩F) = $^1/_3$ 。放在抽屜裏的錢幣共有 6 枚，其中 3 枚是金幣，所以 P(F) = $^3/_6$ = $^1/_2$。代入上式便得出答案是 P(E｜F) = $^1/_3$／$^1/_2$ = $^2/_3$。上面說答案為 $^1/_2$，是錯的。

如果你還不相信答案是 $^2/_3$，我們換過另一個看法吧。先把抽屜也標上號碼 1 和 2。假定在抽屜 A1、A2 和 C1 放置金幣，在抽屜 B1、B2 和 C2 放置銀幣。既然知道了箱子的一個抽屜裏放置了金幣，只有三種可能的情形：（1）選着箱子 A，打開抽屜 A1，（2）選着箱子 A，打開抽屜 A2，（3）選着箱子 C，打開抽屜 C1。它們發生的可能性是相同的，但其中只有（1）或（2）時，另一枚才是金幣，所以答案是 $^2/_3$。

其實，「另一枚是金幣」的概率是 $^1/_2$ 這個答案，解答了另一個類似的問題。請你想一想，在什麼情形底下答案是 $^1/_2$ 呢？

例四：是兒子還是女兒？

李先生在地下車站碰見陳先生，閒談中問及陳先生有幾名子女，陳先生說：「我有兩名孩子。」李先生便問：「大的是男孩嗎？」陳先生說：「是。」就在這時，火車到站，他們要分手了。你猜陳先生的小的孩子是男孩的概率是多少？相信大家不假思索便答是 $^1/_2$ 了。

對的，正確答案是 $^1/_2$。但如果李先生在知道陳先生有兩名孩子後問：「有男孩子嗎？」陳先生說：「有。」這時他們要分手了。你猜陳先生的小的孩子是男孩的概率是不是仍然為 $^1/_2$ 呢？請你先想一想才看下去吧。

陳先生有兩名孩子，他們的性別有四種可能的情況：（i）老大是男孩，老二是男孩，（ii）老大是男孩，老二是女孩，（iii）老大是女孩，老二是男孩，（iv）老大是女孩，老二是女孩。假設生男生女機會均等，這四個基本事件以同樣可能性發生。如果 A 是「老二是男孩」這事件，B 是「陳先生有男孩」這事件，我們要計算的是 $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$。由於 $A \cap B$ 是由（i）和（iii）構成，所以 $P(A \cap B) = 2/4 = 1/2$。B 是由（i）和（ii）和（iii）構成，所以 $P(B) = 3/4$。因此，

$P(A \mid B) = 2/4 \times 4/3 = 2/3$。你若不相信，讓我們換一個看法。知道了陳先生有男孩，就是排除了（iv）這種情況，在剩下的三種情況裏，（i）和（iii）都是老二是男孩，所以要計算的概率便是 $2/3$。

例五：該死的獄卒

監獄裏有三名死囚甲、乙、丙，他們的行刑日期，碰巧是國王的生日。為了表示他的寬大，國王宣佈當天將會釋放其中一人。國王已經決定當天釋放誰，但他鄭重吩咐獄卒，在行刑之前，絕對不能把釋放誰的決定，泄漏出去。三名死囚自然非常焦急，希望早點知道命運，便追問獄卒。獄卒懾於國王的命令，一直守口如瓶。在行刑前一天，死囚甲實在忍不住了，便悄悄地對獄卒說：「我們三人中只有一人會被釋放，那麼乙和丙兩人中，總有一人被殺的，你告訴我，誰會被殺呢？我絕對不會把你的答案告訴他們的，請你放心。」獄卒抵不住甲的糾纏，便說：「乙會被殺。」國王知道後，大為震怒，召見獄卒，對他說：「你知道你泄漏了秘密嗎？」獄卒辯說：「反正乙和丙兩人中一定有一個要死的，那麼告訴甲知道那個是誰怎麼算泄漏秘密呢？」國王說：「你錯了，原本甲被釋放的機會是 $1/3$，但你告訴他乙會被殺，那麼甲和丙兩人中必有一個會被釋放，

所以甲知道會被釋放的機會便昇為 $1/2$ 了。你這樣做，不是幫了甲一個大忙嗎？該死！」你們認為獄卒是該死嗎？

讓我們先把國王給的理由，用條件概率的語言翻譯出來。「誰會被釋放」是個偶然事件，有三個可能的結果，甲、乙、丙。樣本空間便有三個元素，用符號表示，即是 S＝｛甲，乙，丙｝。由等可能性假設，有 P(甲) = P(乙) = P(丙) = $1/3$，這裏 P(甲)表示甲被釋放的概率，餘者類推。設 A 是「乙會被殺」這個事件，那麼 A＝｛甲，丙｝。設 B 是「甲被釋放」這個事件，國王的意思，是說既然獄卒已經透露乙會被殺，所以要計算

$$
\begin{aligned}
P(B \mid A) &= P(A \cap B) / P(A) \\
&= P(\text{甲}) / (P(\text{甲}) + P(\text{丙})) \\
&= 1/3 / (1/3 + 1/3) = 1/2。
\end{aligned}
$$

這是大於原來的 P(B) = P(甲) = $1/3$。

以上是國王的論證，但他犯了一個錯誤，就是弄不清事件 A 的定義應該是什麼。他以為 A 是「乙會被殺」這個事件，但其實我們更應該考慮另一個事件 C，即是「獄卒說乙會被殺」。我們要計算的，是 P(B｜C)，而不是 P(B｜A)。請注意，C 跟 A 很不一樣！A＝｛甲，丙｝是對的，但 C＝｛甲，丙｝就不對了。如果丙會被釋放的話，那麼獄卒當然會告訴甲，乙會被殺。但如果甲會被釋放的話，獄卒會隨意在乙和丙兩人中，說出一人，不一定說乙會被殺的。要仔細描述事件 C，只好修改一下樣本空間了，這次 S 有四個元素，就是甲 1、甲 2、乙、丙，其中甲 1 代表甲會被釋放而獄卒說乙會被殺，甲 2 代表甲會被釋放而獄卒說丙會被殺，乙代表乙會被釋放，丙代表丙會被釋放。這些基本事件的概率是 P(甲 1) = $1/6$，P(甲 2) = $1/6$，P(乙) = $1/3$，P(丙) = $1/3$（為什麼？）。

現在考慮事件 B＝｛甲 1，甲 2｝和 C＝｛甲 1，丙｝，所以 $P(B \mid C) = P(B \cap C) / P(C)$

$$= P(\text{甲 1}) / (P(\text{甲 1}) + P(\text{丙}))$$

$$= \tfrac{1}{6} / (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}。$$

因此，獄卒的答案，並沒有增加甲會被釋放的概率。獄卒是無辜的，國王若判他死刑，只說明國王搞不清楚概率論而已！

假如死囚甲比較直接地問：「乙會被殺嗎？」而獄卒又回答了這個問題，那麼獄卒又是否該死呢？請你想一想。

第八章

雜例一束

例一：如何選購二手音響器材？

某無線電月刊，差不多每期都有一份出讓二手音響器材的廣告。對每一部出讓的音響器材，你可以根據它的年份、牌子、狀態來估計它的合理價錢。通常，這個你認為是合理的價錢不一定等於真正的售價。為了看看購買這部二手音響器材合不合化算，你可以計算它的超值率 E，就是 E＝（合理價錢－售價）／（售價）。例如，一部二手音響器材售 1000 元，你估計它應該值 1200 元，這部二手音響器材的超值是 200 元，而它的超值率是 20% 。如果你估計它只值 900 元，這部二手音響器材的超值率便是－10% 了。顯然，超值率越高的二手音響器材是越值得購買。假定你計劃由 1 月至 12 月這年內購買一部二手音響器材，怎樣辦才可以選購到最高超值率的一部呢？最理想的辦法是等到年底，然後把十二個月來在廣告上出現過的二手音響器材比較一番，看看那部超值率最高便買那部。然而，這個辦法不切實際，因為等到年底才作出決定，是太遲了，你心目中想買的一部，可能早已沽出！要買在某月份廣告上出現的二手音響器材，你必須在那個月便作出決定。由於有了這個限制，沒有一個方法能夠保證你一定買到最高超值率的二手音響器材。但有沒有方法使我們有較大機會買到最高超值率的二手音響器材呢？這又得勞煩概率論了。

一個很普通的方法，是碰運氣。在 12 個月中隨意選一個月，然後購買在那個月的廣告上出現的二手音響器材。用這個方法，買到最高超值率的二手音響器材的概率是 $^{1}/_{12}$。有沒有其他方法，能夠提高這概率呢？上面的方法有一個明顯的缺點，

就是沒有試圖利用已知的數據。舉例來說，在五月時我們已經知道前四個月那四部音響器材的超值率，應該拿五月那部音響器材的超值率跟前四個月那四部的超值率來比較，從而決定是否選購五月份的那部。這個試圖利用已知數據的選購方法，照理是比前一個方法高明一些，但是否真箇如此呢？我們需要作一點概率的計算。為便於說明起見，不如進一步把問題簡化，把時間由 12 個月縮短為 3 個月，即是要求在三個月內選購一部二手音響器材。讓我們比較兩個不同的選購方法：

（A）一個不利用數據的選購方法 —— 在三個月中隨意選一個月，買那個月的音響器材。這樣做，買到最高超值率的一部的概率是 $^1/_3$。

（B）一個利用數據的選購方法 —— 一定不買一月那部。如果二月那部的超值率較一月那部的超值率高，便買二月那部，否則便買三月那部。這樣做，當然有利也有弊。如果碰巧一月份那部的超值率是最高的話，便失諸交臂。但我們卻利用一月份的數據，幫助我們作出決定。

讓我們計算用（B）買到最高超值率的二手音響器材的概率，假定 A 的超值率最高、B 其次、C 又其次。這三部音響器材可能以不同的次序在三個月出現，共有 6 個可能的結果，就是（ABC）、（ACB）、（BAC）、（BCA）、（CAB）、（CBA），括號裏的次序按一月、二月、三月來排。我們沒有任何資料指出那一個次序較另一個更有可能發生，不妨假設每個發生的概率都是 $^1/_6$。在這 6 個次序中，有三個次序（即是第一、第二、第四）是二月份那部的超值率比一月份那部低，在那些情形底下，我們便選購三月份那部。其他三個次序（即是第三、第五、第六）是二月份那部的超值率比一月份那部高，在那些情形下，我們便選購二月份那部。我們把 6 種可能發生的情形都列出來（見表 8.1），由此可以見到，買到最高超值率那部的概率是

可能次序	概率	購買月份	購買的二手音響系
（ABC）	$^1/_6$	三月	C
（ACB）	$^1/_6$	三月	B
（BAC）	$^1/_6$	二月	A *
（BCA）	$^1/_6$	三月	A *
（CAB）	$^1/_6$	二月	A *
（CBA）	$^1/_6$	二月	B

*＝購買得超值率最高的一部

表 8.1

$^1/_6 + ^1/_6 + ^1/_6 = ^1/_2$，比較用（A）買到最高超值率那部的概率是大了。在概率論裏，有關這類問題的研究，叫做「最優中止法則」（Optimal Stopping Rule）。

例二：醉酒鬼碰壁

一名走得左搖右擺的醉酒鬼，在一條窄巷中徘徊。巷子很窄，他向左踏一步便碰着左邊牆壁，向右連踏兩步便碰着右邊牆壁（見圖 8.2）。這名醉酒鬼醉眼昏花，左右不分，他踏出的每一步，向左和向右的機會均等，你猜他碰着左邊牆壁的概率是多少呢？

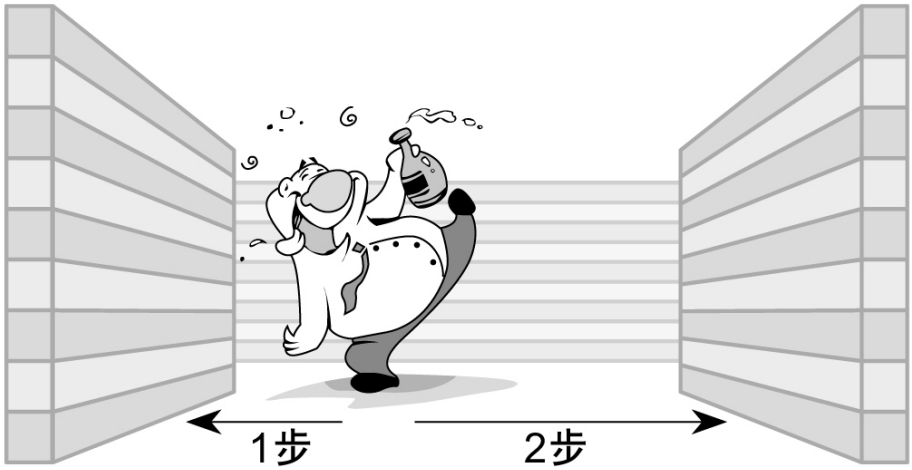

圖 8.2

首先，這名醉酒鬼是遲早要碰壁的，因為要不碰壁，他第一步必須向右，第二步必須向左，第三步又必須向右，如此類推。所以，他要在 N 步內還不碰壁的概率是$(\frac{1}{2})^N$。當 N 越來越大，這個概率越來越接近零，就是說他遲早要碰壁的。我們假設他碰着左邊牆壁的概率是 P，碰着右邊牆壁的概率是 $1-P$。先考慮醉酒鬼走頭兩步的後果，有三個可能，列表如下（見表 8.3）。在 C 的情況下，這名醉酒鬼回到原來的地方，但照

	第一步	第二步	後果	概率
A	左		碰左壁	½
B	右	右	碰右壁	¼
C	右	左	回到原地	¼

表 8.3

樣走下去，他還是會碰着左邊牆壁或右邊牆壁，而概率分別是 P 或 $1-P$。所以，通過後果 C 而碰左邊牆壁的概率是 $P/4$，碰右邊牆壁的概率是$(1-P)/4$。因此 $P=\frac{1}{2}+P/4$（為什麼？），解方程便得 $P=\frac{2}{3}$。

以上的問題，好像是遊戲文章，不切實際，但事實上它有不少應用。在概率論的發展史上，這是「賭徒破產問題」（Gambler’s Ruin Problem）的一個特例。考慮甲、乙兩人作一連串公平賭局（即每人得勝的概率是 $\frac{1}{2}$），假設每次負方給勝方一元，甲有賭本一元，乙有賭本二元，問甲輸光的概率是多少？請你先想一想，這個「賭徒破產問題」為什麼是「醉酒鬼碰壁問題」的變相？我們把醉酒鬼的每一步看成是賭局的勝負，向左踏步表示乙勝，向右踏步表示甲勝。醉酒鬼左右不分，向左或向右踏步的機會均等，代表了賭局是公平的。醉酒鬼距離左邊牆壁一步，碰着左邊牆壁表示甲輸掉一元，也就是輸光了。同樣道理，碰着右邊牆壁表示乙輸掉二元，也就是輸光了。

從以上的計算，便知道甲輸光的概率是 $^2/_3$。更一般的情況，是假設甲有賭本 A 元，乙有賭本 B 元，可以證明，甲輸光的概率是 $B/(A+B)$。當 B 比 A 大很多時，甲輸光的概率十分接近 1。例如假定 A 是 100，B 是 1000000，那麼甲輸光的概率是 0.9999。在商場上時常出現「大魚吃小魚」的現象，把這句話用在賭場上，來得更貼切呢？

上面描述醉酒鬼行動的概率模型，叫做「隨機走動」（Random Walk），我們利用同樣的模型，也計算了賭徒輸光的概率。但如果你以為它只是用來計算賭博的問題，便大錯特錯了。事實上，這個概率模型，應用多着呢！其中一個著名的例子，就是用它來解釋物理學上的布朗運動（Brownian Motion）。布朗（Brown）是一位植物學家，在 1827 年他發現如果把一些微小的物質放在液體中，然後用顯微鏡觀察，這些微小的物質會不停地在液體中四圍流竄。這些不規則的運動，被稱為布朗運動。怎樣解釋它的成因呢？原來液體的分子，也是不停地運動着，但相對於那些微小物質來說，液體分子小得多，用顯微鏡也看不出來。當液體分子碰着質點時，質點受到撞擊，便不停地移動。由於液體分子的運動是雜亂無章的，質點受到的撞擊，來自不同的方向，以致它的運動也是隨意的，就像醉酒鬼的步伐一般。只是質點的運動比較複雜，它可以在三維空間的任何一個方向移動，並非只局限在一條線段上，物理學家愛因斯坦（Einstein）在二十世紀初建立了一個三維隨機走動模型，成功地解釋了質點的布朗運動。

例三：「哈代—溫堡定律」

按照孟德爾（Mendel）的遺傳理論，生物的性狀由遺傳因子（後稱為基因 Gene）控制，而且服從某些規律。在交配時，雄性的一對基因當中一個和雌性的一對基因當中一個隨意組

合，構成下一代的一對基因。為簡化說明，讓我們假定某性狀只受單一對基因控制，而該基因只有兩種，記作 A 和 a，因而一對基因可以是 AA，可以是 Aa，也可以是 aa，我們把這三種情況稱為不同的基因型（Genotype）。但表現出來的性狀卻只有兩種，基因型是 AA 和 Aa 的品種表現同一種性狀（例如中國南方的雞有一種羽毛翻捲的性狀），基因型是 aa 的品種表現另一種性狀（例如羽毛正常的性狀）。我們把 A 叫做這種相對性狀的顯性基因（Dominant Gene），a 叫做隱性基因（Recessive Gene）。由含顯性基因的基因型決定的性狀便叫做顯性性狀，另一種便叫做隱性性狀。在二十世紀初有些生物學家以為顯性性狀會在後代中逐漸擴散開來，隱性性狀卻會在後代中逐漸消失。在 1908 年英國著名數學家哈代（Hardy）在一本科學雜誌的讀者來信欄上發表了一則短文，利用簡單的概率計算，指出這種說法是錯誤的。差不多同時，一位德國醫師溫堡（Weinberg）也在另一本科學雜誌上發表了同樣的推斷，所以後來這個發現被稱為「哈代溫堡定律」（Hardy–Weinberg Law），開了近世群體遺傳學（Population Genetics）的先河。

哈代和溫堡的發現是這樣的，假定在親代（雄或雌）的基因型分佈中 AA 佔比率 P_1、Aa 佔比率 P_2、aa 佔比率 P_3，那麼子代的基因型分佈可以計算出來。用概率的記法，便是 P(AA)= P_1、P(Aa) = P_2、P(aa) = P_3，$P_1 + P_2 + P_3 = 1$。子一代的基因型，可以有系統地用表列出來（見表 8.4）：例如父是 AA 母是 Aa（或父是 Aa 母是 AA）的概率是 $P_1P_2 + P_2P_1 = 2P_1P_2$，而子女的基因型只能是 AA 或 Aa，不能是 aa，其中是 AA 的概率為 $^1/_2$，是 Aa 的概率為 $^1/_2$（為什麼？）。其餘類似地計算，請你驗算一下吧。所以子一代的基因型分佈是：

$$P(\ AA\ ) = 1 \times P_1^2 + {}^1/_2 \times 2P_1P_2 + {}^1/_4 \times P_2^2$$

$$=\left[\frac{(2P_1+P_2)}{2}\right]^2$$

P(Aa) = $^1/_2 \times 2P_1P_2 + {}^1/_2 \times P_2^2 + 1 \times 2P_1P_3 + {}^1/_2 \times 2P_2P_3$

$$=\left[\frac{(P_2+2P_1)(P_2+2P_3)}{2}\right]$$

P(aa) = $^1/_4 \times P_2^2 + {}^1/_2 \times 2P_2P_3 + 1 \times P_3^2$

$$=\left[\frac{(P_2+2P_3)}{2}\right]^2$$

親代基因型	概率	子代基因型概率		
		AA	Aa	aa
AA／AA	P_1^2	1	0	0
AA／Aa	$2P_1P_2$	½	½	0
AA／aa	$2P_1P_3$	0	1	0
Aa／Aa	P_2^2	¼	½	¼
Aa／aa	$2P_2P_3$	0	½	½
aa／aa	P_3^2	0	0	1

表 8.4

一個有意思的問題是：在什麼條件底下，基因型的分佈是平衡（Stable）的，即是子一代和親代的基因型分佈是一樣？要是這樣，在群體中後代表現出不同性狀的品種的比率便跟親代是一樣了，顯性性狀不會擴散，隱性性狀也不會消失。為了要 $P_1 = [(2P_1 + P_2)/2]^2$ 和 $P_3 = [(P_2 + 2P_3)/2]^2$，不難推出一個必需條件是 $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_3}=1$（請你試試），有趣的是反過來如果 $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_3}=1$ 成立，便有 $P_1 = [(2P_1 + P_2)/2]^2$ 和 $P_3 = [(P_2 + 2P_3)/2]^2$（也請你試試）。就是說，基因型分佈是平衡的充要條件是 $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_3}=1$。更有趣的事情還在後頭，請注意子一代的 P(AA)和 P(aa)剛好滿足 $\sqrt{\mathrm{P(AA)}}+\sqrt{\mathrm{P(aa)}}=1$ 這個條件，即是說無論起初 P_1 和 P_3 是什麼（不一定滿足 $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_3}=1$ 這個條件），子二代起基因型分佈便平衡下來了。所以無論起初 P_1 和 P_3 是

什麼，顯性性狀不會在後代中擴散，隱性性狀也不會在後代中消失。

這段故事，還有一段小插曲呢。哈代是英國近代一位卓越的數學家，在數論（Number Theory）方面貢獻尤其巨大，但他卻極偏重數學的「美」，甚至認為「美」是評價數學工作重要與否的唯一標準。他曾引以為榮地說自己的工作是「沒有用」的「純粹數學」（其實後來數論在編碼（Coding）上找到不少應用！），然而萬萬想不到他只不過寫了這麼一則短文，卻開闢了遺傳學的一個研究方向，利用數學理論預測群體的遺傳情況。「哈代－溫堡定律」本身就是一個非常漂亮的應用數學例子，其中的計算，不云不美，它的用途，不云不大！其實，「美」和「用」倒不是不能並存的，「美」的不見得便「沒用」，而「有用」的也不見得便「不美」，又何苦硬要把它們二分呢？

例四：包、剪、錘

你們一定玩過「包、剪、錘」這個遊戲吧？「包」剋「錘」，「錘」剋「剪」，「剪」剋「包」，它們互相剋制，使這個簡單的遊戲富於變化，怪不得每個小孩子對它都很熟悉了。但你們玩這個遊戲時，有沒有想過怎樣用概率論來分析它？

每個人玩「包、剪、錘」時，都有自己的策略（Strategy）。如果我們長期地觀察一個人玩這個遊戲，我們可以統計他用「包」、「剪」、「錘」的相對頻率。當觀察次數很多時，不妨就把這個相對頻率當作概率，表示這人用「包」、「剪」、「錘」孰多孰少的傾向，也就是這個人用的策略了。我們可以把這個策略記作（P_1, P_2, P_3），其中 P_1、P_2、P_3 分別是用「包」、「剪」、「錘」的概率。現在考慮兩個用不同策略的人玩這個遊戲，假定甲的策略是（P_1, P_2, P_3）乙的策略是（R_1, R_2, R_3），知道 P_1、P_2、P_3、R_1、R_2、R_3 的值，怎樣計算甲、乙二人作賽

多次後的勝負情況呢？

我們假定在每一局比賽中，勝方得分，負方減分，和局時各得零分。甲可在「包」、「剪」、「錘」中選一，乙也是一樣，所以兩人對壘時，有 9 個可能的結果。按照這些可能結果，甲的得分可以用下表列出（見表 8.5），其中每一行代表乙的選

乙／甲	包	剪	錘
包	0	+1	-1
剪	-1	0	+1
錘	+1	-1	0

表 8.5

擇，每一列代表甲的選擇，表內的數字表示甲的得分。例如當甲用「剪」（第二列）而乙用「包」（第一行）時，甲的得分是 1，餘者類推。我們知道甲和乙選擇「包」、「剪」、「錘」的概率，如果我們假設兩人選擇什麼是獨立事件的話，上述的 9 個可能的結果出現的概率，可以用 P_1、P_2、P_3、R_1、R_2、R_3 寫出來（見表 8.6）。例如甲用「剪」（第二列）而乙用「包」（第一行）的概率是 P_2R_1，餘者類推。要知道甲、乙雙方誰的勝數較高，我們計算甲得分的期望值。把兩個表中對應位置的數相乘，全部加起來，就是這個期望值了，即是

$$0 \times P_1R_1 + 1 \times P_2R_1 - 1 \times P_3R_1 - 1 \times P_1R_2$$
$$+ 0 \times P_2R_2 + 1 \times P_3R_2 + 1 \times P_1R_3 - 1 \times P_2R_3 + 0 \times P_3R_3$$
$$= (P_2 - P_3)R_1 + (P_3 - P_1)R_2 + (P_1 - P_2)R_3。$$

乙／甲	包	剪	錘
包	P_1R_1	P_2R_1	P_3R_1
剪	P_1R_2	P_2R_2	P_3R_2
錘	P_1R_3	P_2R_3	P_3R_3

表 8.6

假如甲的策略是（$^3/_8$, $^1/_4$, $^3/_8$），乙的策略是（$^1/_4$, $^3/_8$, $^3/_8$），那麼甲的得分的期望值是 $^1/_{64}$，即長遠來說，每對壘 64 局甲才平均贏 1 分。假如丙的策略是（$^3/_8$, $^1/_8$, $^1/_4$），那麼當甲和丙對壘時，甲平均每局輸 $^1/_{64}$ 分。當乙和丙對壘時，乙平均每局贏 $^1/_{64}$ 分。可見長遠來說，甲勝乙，乙勝丙，但丙卻勝甲。甲、乙、丙也是互相剋制呢！

策略的運用，當然因人而異，但一般人的策略，比較傾向用「包」或「錘」（可能因為「剪」的手勢最不自然），所以與甲的策略接近。如果我們用丙的策略，多用「包」和「剪」，便可以制勝。當然，如果我們用丙的策略而被對方察覺時，對方改用乙的策略（而我們不改變策略）便可反敗為勝了。由以上的討論，我們知道，如果自己的策略被對方知悉，對方便可謀求對策。例如對方知道你用甲的策略，他便用丙的策略；你用乙的策略，他便用甲的策略；你用丙的策略，他便用乙的策略。有沒有一種策略，即使對方知悉了，也佔不了便宜呢？考慮（$^1/_3$, $^1/_3$, $^1/_3$）這個策略，即是對「包」、「剪」、「錘」都不偏袒。如果我們用這個策略，不管對方用什麼策略（R_1, R_2, R_3），我們的得分期望值也是 $0 \times R_1 + 0 \times R_2 + 0 \times R_3 = 0$，所以無論對方用什麼策略，長遠來說我們沒有敗。當然，我們也不

能取勝，長遠來說大家打個平手。以上的策略，不求有功，但求無過，把自己可能蒙受的損失減至最小，就叫做「極小極大策略」（Minimax Strategy）。

例五：要多少個質量檢查員？

某工廠每年生產 20 萬部產品，完全沒有採用質量檢查，如果其中有 2 萬部是有缺憾的廢品，售出後被顧客退回，工廠便得賠償顧客的損失。假如對每部廢品工廠要賠償 10 元，工廠共需賠款 20 萬元了。一個減少這項支出的辦法，是僱用質量檢查員來檢視每一部產品，發現不合格的便不給它出廠。然而質量檢查員也會出錯，未必每件廢品也能辨出，可能平均每 10 部廢品中便有一部「漏網之魚」逃過檢查員的檢視。要補救這一點，就要僱用多幾名檢查員，各自獨立地檢視產品，使廢品出廠的機會降低。但問題跟着來了，要僱用多少名檢查員呢？如果僱用太多，工廠可省卻不少賠償費用，但卻要支出一大筆薪金。如果僱用太少，薪金支出少了，但賠償費用卻增加。怎樣估計要聘多少名質量檢查員，又得借助概率論了。

現假定對每部廢品工廠賠償 10 元，而每名質量檢查員的年薪 15000 元。我們也假定廢品被一名檢查員發現的概率是 0.9，而且還假定他們各自獨立地檢視產品的。這樣，如果僱用 N 名檢查員，廢品出廠，必須先逃過 N 名檢查員的檢視。逃過一名檢查員的檢視的概率是 0.1，逃過 N 名檢查員的檢視的概率便是$(0.1)^N$了，所以廢品出廠的概率是$(0.1)^N$。有 2 萬部廢品的話，出廠的廢品數目的期望值就是 $20000 \times (0.1)^N = 2 \times 10^{4-N}$，因而賠償費用的期望值是 $10 \times 2 \times 10^{4-N}$ 元。由於僱用一名檢查員需要付年薪 15000 元，薪金總支出便是 $15000 \times N$ 元。薪金支出與賠償費用合起來，工廠每年期望需付 $S = 20 \times 10^{4-N} + 15000N$ 元。讓我們計算一下當 $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 時這筆支出

S 是多少，列於下表（見表 8.7）。可以看到，當 $N = 2$ 時，S 是最小，所以最佳策略是僱用兩名檢查員。

N	S
0	200000
1	35000
2	32000
3	45200
4	60020
5	75002

表 8.7

當然，以上的討論是把事情過分簡化了。例如兩名檢查員的檢視結果是否真的是獨立事件？檢查員既然會把廢品看成是合格，他也可能會把合格產品看成是廢品，是否增加廠方的損失？有時工廠不用直接賠償售出的廢品，但廢品充斥市場，影響工廠信譽，這時怎樣計算廠方的損失？又或者事前不知道約有多少廢品，便如何計算？很多時候，不能逐件產品檢視，只能抽取一小部分檢視，那怎辦呢？總而言之，在現實的情況底下，上述的計算，未必適用，但這並不表示現實情況底下概率論派不了用場，只不過，在那些時候，需要用到的概率論計算，是更複雜和深入而已。

例六：花崗岩還是玄武岩？

地質學家有一個方法，鑒定岩石是花崗岩（Granite）還是玄武岩（Basalt）。他們發覺兩種岩石對太陽光紅內線有不同的反射情況，特別是對於三種特定波長的光波（分別記為 R_1、R_2、R_3），兩種岩石的反射光譜有不同的強度。對於花崗岩，反射光譜的強度，順序是 $R_1 < R_2 < R_3$，即是對光波 R_1 的反射強度

最弱，R_2 次之，R_3 最強。對於玄武岩，反射光譜的強度，順序是 $R_3 < R_1 < R_2$。

在實驗室裏，各種情況都控制得井井有條，所以可以根據 R_1、R_2、R_3 三種光波被岩石反射時強度的順序來判斷某一岩石樣本是花崗岩還是玄武岩。但是地質學家通常要距離岩石很遠來判斷它是花崗岩還是玄武岩，例如從飛機上甚至衛星上來觀察岩石對光波的反射情況。由於距離是這樣遠，觀察的結果便可能出錯了。就算岩石真的是花崗岩，觀察得它的反射光譜強度，也不一定是依 $R_1 < R_2 < R_3$ 順序。事實上，如果在飛機上遙遠地觀測一些已知為花崗岩的地區，得到的反射強度，一百次中有六十次是 $R_1 < R_2 < R_3$，十五次是 $R_3 < R_1 < R_2$，二十五次是 $R_1 < R_3 < R_2$，即是只有六成機會，實驗觀察結果和理論的結果相符。同樣地，如果在飛機上遙遠地觀測一些已知為玄武岩的地區，得到的反射強度，一百次中有七十次是 $R_3 < R_1 < R_2$，二十次是 $R_1 < R_3 < R_2$，十次是 $R_1 < R_2 < R_3$，即是只有七成機會，實驗觀察結果和理論的結果相符。

我們可以用條件概率的語言，總結以上的數據：

$P(R_1 < R_2 < R_3 \mid$ 花崗岩 $) = 0.6$，

$P(R_1 < R_2 < R_3 \mid$ 玄武岩 $) = 0.1$，

$P(R_1 < R_3 < R_2 \mid$ 花崗岩 $) = 0.25$，

$P(R_1 < R_3 < R_2 \mid$ 玄武岩 $) = 0.2$，

$P(R_3 < R_1 < R_2 \mid$ 花崗岩 $) = 0.15$，

$P(R_3 < R_1 < R_2 \mid$ 玄武岩 $) = 0.7$。

假定某區的岩石，性質未明。地質學家把這區分成 $30 \times 30 = 900$ 個方格，然後從飛機上量度每個方格內一點對光波的反射強度，記錄每點的反射強度的順序，得出以下的統計數字：900 點中有 360 點的順序是 $R_1 < R_2 < R_3$，有 216 點是 $R_1 < R_3 < R_2$，有 324 點是 $R_3 < R_1 < R_2$。利用這些數據，地質學家怎樣判

斷該區是花崗岩還是玄武岩呢？假定該區是花崗岩的概率是 P，是玄武岩的概率是 $1-P$，那麼根據「全概率公式」（見第七章），便知道：

$$
\begin{aligned}
&P(R_1 < R_2 < R_3) \\
&= P(R_1 < R_2 < R_3 \mid \text{花崗岩})\,P(\text{花崗岩}) \\
&+ P(R_1 < R_2 < R_3 \mid \text{玄武岩})\,P(\text{玄武岩}) \\
&= (0.6)P + (0.1)(1-P)
\end{aligned}
$$

即是 $360/960 = 0.1 + (0.5)P$，解方程得 $P = 0.6$，即是有六成機會該區是花崗岩。

這兒卻出現另一個問題，以上我們只利用 $P(R_1 < R_2 < R_3) = 360/900$ 這個數據來計算。如果用 $P(R_1 < R_3 < R_2) = 216/900$ 又怎樣？的確，類似的計算得到 $216/900 = (0.25)P + (0.2)(1-P)$，由此得 $P = 0.8$。還可以利用 $P(R_3 < R_1 < R_2) = 324/900$ 這個數據，得到 $324/900 = (0.15)P + (0.7)(1-P)$，即是 $P = 0.618$。三個計算得到三個不同的 P 值，那一個才對呢？首先，我們要明白一下，為什麼有三個不同的 P 值？這是因為以上的三種計算分別假設了 $P(R_1 < R_2 < R_3) = 360/900$，$P(R_1 < R_3 < R_2) = 216/900$，$P(R_3 < R_1 < R_2) = 324/900$，而 360/900、216/900、324/900 只是概率的估值而已，並非是概率的真值，所以從三個方程解出來的 P，也只是 P 的估計值而已，並非是 P 的真值。以上的三個計算，是三個估計 P 值的方法，所以得出三個不同的估計值。要決定用那一個方法才對，就要計算每個方法可能做成的誤差，誤差最小的方法就是應採用的方法了。統計理論指出，第三個方法可能做成的誤差最小，所以 $P = 0.618$ 是三個答案中較好的答案。至於為什麼這樣，我們不打算在這兒討論了。其實，還有其他估計 P 值的方法，誤差比上面三個方法都來得小。不過這些方法，需要使用較多統計的知識，超出了這本小書的範圍了。

例七：輻射對遺傳因子的損害

從十九世紀中孟德爾的發現開始，遺傳學有深入的發展，在二十世紀中進入分子遺傳學的新階段，更導致七十年代的新興學科遺傳工程（Genetic Engineering）。科學家已經證實遺傳現象有它的物質基礎，是某種化學分子。絕大部分生物的遺傳物質是去氧核糖核酸（Deoxyribonnuclecic Acid），簡稱為 DNA。如果一個 DNA 分子受到輻射線的照射，便會受到損壞。損壞了的 DNA 分子，會令子代有不正常的性狀，這就是為什麼懷孕的母親不應該接受 X 射線照射的原因。輻射怎樣損壞 DNA 分子呢？首先我們必須瞭解一下分子的結構。在 1953 年，華生（Watson）和克里克（Crick）根據威爾金斯（Wilkins）和弗蘭克林（Franklin）的射線衍射資料，提出著名的雙螺旋（Double Helix）分子結構模型。後來華生、克里克和威爾金斯因這項成就獲得 1962 年度諾貝爾生理學醫學獎，弗蘭克林這一位傑出的女科學家卻得不着應受的重視，更不幸在 1958 年英年早逝，實在是科學界的一大損失。一個 DNA 分子由兩條長鏈並排相互盤旋組成，每條鏈上是一連串的核苷（Nucleotides），在不同鏈上相對位置的核苷酸配對地扣着，就有如一副螺旋盤梯上的梯級（見圖 8.8）。同一條鏈上相鄰的

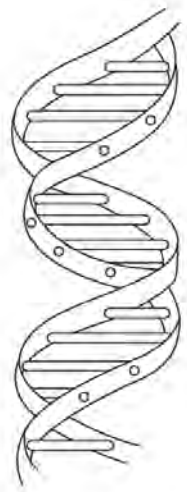

圖 8.8

兩個核苷酸是靠一種稱 PE 鍵（英文全名是 Phosphodiester

Bond）的力量維繫起來。不同鏈上相對位置的核苷酸是靠一種稱為 H 鍵（英文全名是 Hydrogen Bond）的力量維繫起來。我們不妨把 DNA 的結構，簡單地看成是一副梯，兩條扶手靠 PE 鍵黏合，梯階靠 H 鍵黏合（見圖 8.9）。

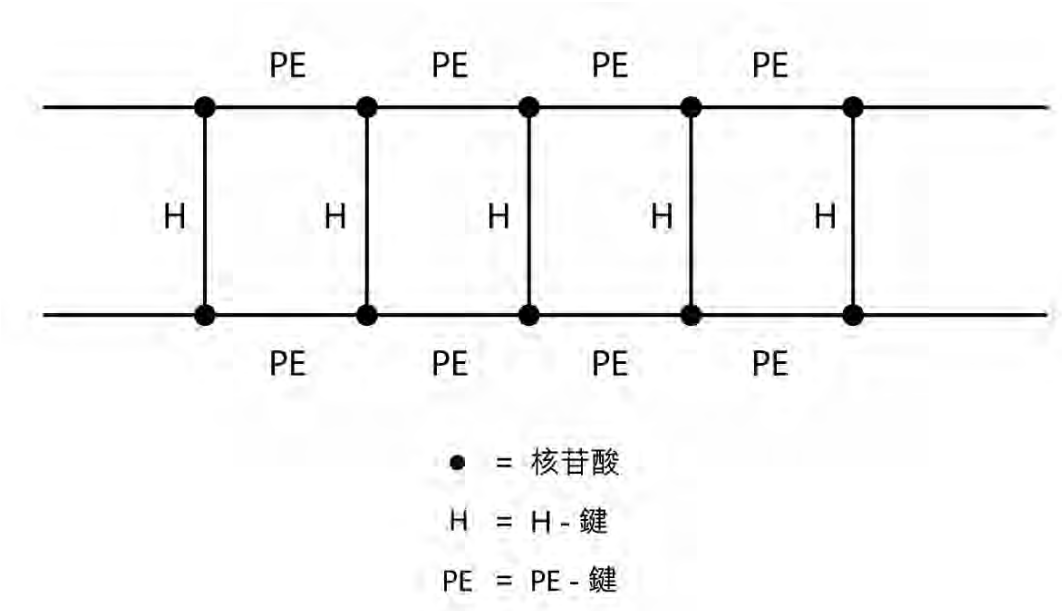

圖 8.9

科學家知道 PE 鍵的維繫力很強，H 鍵的維繫力較弱。但輻射卻只能破壞 PE 鍵，反而不能破壞 H 鍵。假如輻射只破壞一個 PE 鍵（見圖 8.10(a)），兩條鏈仍然由 H 鍵及其他完好的 PE 鍵扣在一起，整個 DNA 分子不會斷裂，損壞的 PE 鍵也會重新建立，使 DNA 分子回復原狀。但假如輻射破壞了兩個 PE 鍵，DNA 分子會不會斷裂呢？這得看受損壞的鍵是在那個位置了。如果它們在同一條鏈上（見圖 8.10(b)），由於另一條鏈上的 PE 鍵完好無缺，維繫着整個分子，分子不致斷裂，損壞的 PE 鍵也會復原。

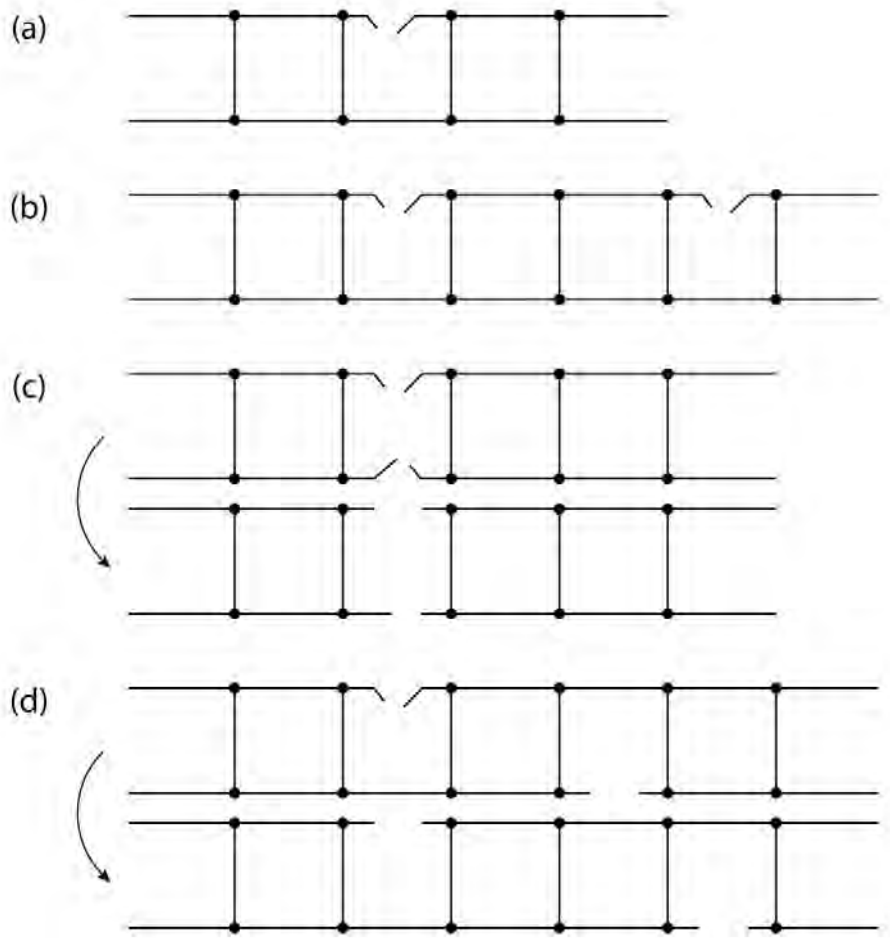

圖 8.10(a)(b)(c)(d)

如果它們剛好處於不同鏈上的相對位置（見圖 8.10(c)），DNA 分子便會斷裂，不能回復原狀了。其實，即使兩個受損壞的鍵是在不同的鏈上，中間隔着 h 個 H 鍵（見圖 8.10(d)），分子還是有機會斷裂的，視乎 h 有多大。這是因為 H 鍵維繫力較弱，當 h 大的時候，合起來它們仍然扣着兩條鏈，但當不很大時，分子便斷裂了。換句話說，h 有個臨界值（Critical Value）h_0，當兩個在不同的鏈上的損壞 PE 鍵相隔多於 h_0 個 H 鍵時，DNA 分子仍然完好，但當相隔只有 h_0 或少於 h_0 個 H 鍵時，DNA 分子便會斷裂。怎樣決定這個臨界值呢？

生化學家設計了一個實驗方法，加上簡單的概率計算，解答了這個問題。首先，他們用化學方法找出 DNA 分子的鏈的

平均長度，即是每條鏈上平均有多少個核苷酸。跟着他們用 X 射線照射 DNA 分子，把某些 PE 鍵破壞，然後加入某種化學溶液，把 H 鍵和 PE 鍵穩定下來，使它們不會自行脫落或重新接上，於是便能夠測定有百分之幾的 DNA 分子斷裂了。下一個步驟，是加入另一種化學溶液，把所有 H 鍵破壞，於是便能夠測定在一個 DNA 分子的鏈上，有多少個 PE 鍵受到輻射破壞了。以下是一些數據：DNA 分子的平均長度是 30000，完好的 DNA 分子的百分比是百分之 78.5，每條鏈上平均有 33 個 PE 鍵受損壞。讓我們把兩條鏈分別叫做 A 和 B。A 上的 30000 個 PE 鍵中有 33 個受損壞。考慮 A 上任一個受損壞的 PE 鍵，如果在 B 上相對位置的 PE 鍵或者在它左面或右面 h_0 個內的 PE 鍵受損壞的話，DNA 分子便會斷裂（見圖 8.11）。要它不斷裂，這 $2h_0+1$ 個 PE 鍵必須沒有受損壞，我們把這 $2h_0+1$ 個 PE 鍵叫做「危險位置」。

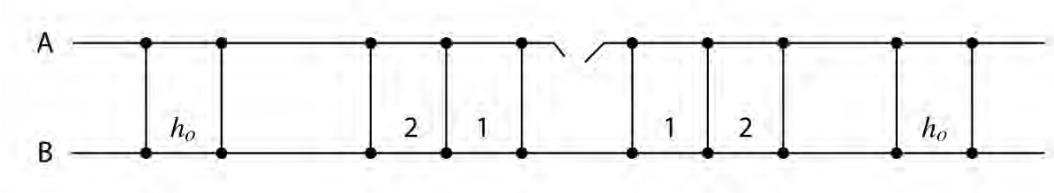

圖 8.11

由於 A 上有 33 個受損壞的 PE 鍵，對應的「危險位置」便有 $33(2h_0+1)$ 個（因為相對來說鏈是這樣長，不妨假定那 33 個受損壞的 PE 鍵相隔不太近，使對應於不同的 PE 鍵的「危險位置」沒有重疊）。B 上也有 33 個受損壞的鍵，要分子不斷裂，它們任何一個都不能落在那 $33(2h_0+1)$ 個「危險位置」上。每一個不落在「危險位置」上的概率是 $P=[30000-33(2h_0+1)]/30000$，個個都不落在「危險位置」上的概率是 P^{33}。根據實驗結果，$P^{33}=0.785$，解方程得 h_0 大約是 3。也就是說，合 4 個或以上的 H 鍵，才能把受損壞的 DNA 分子仍然維繫着。

附錄

概率論發展簡史

概率論起源於賭博嗎？

很多人都說概率論的研究源於賭博，特別強調在十七世紀中葉由一位「狂熱的賭徒」梅累(de Méré)提出兩個問題，引起法國數學家帕斯卡(Pascal)和費馬(Fermat)的興趣，兩人為了解答這些問題，在書信來往中奠下概率論的基石。 有人把概率論的起源追溯至更早一點，在十六世紀中葉意大利數學家卡當(Cardano)寫了《賭博的遊戲》，內容涉及概率的討論。在以後的二百年間，有關概率的文獻，亦不時以紙牌、彩票、骰子為例，這更加容易使人覺得概率論是源於賭博了！

其實，賭博遊戲古已有之，可謂「歷史悠久」！考古學者在東西方都發掘了不少各式各樣的古代賭具，例如在公元前五千年的遺物當中，時常見到一些有蹄獸類的距骨，這些距骨有四個面，可當股子用，可算是最原始的賭具了。又例如在現今伊拉克地區發掘到的骰子，是公元前三千年前的遺物。也有另一說，認為在公元前一千二百年希臘聯軍大舉進犯特洛城，圍城十年，十年當中為消解士兵沉悶的情緒，有人發明了很多的賭博遊戲來。所以賭博遊戲並非是十六、十七世紀的產物，但為什麼概率論不在更早的時候出現，卻要等到十六、十七世紀呢？要比較全面地了解這些問題，我們必須看看概率論的發展經過，也必須看看十七世紀的社會背景和當時數學發展的氣候。

數學史上的「不白之冤」

從十七世紀中葉至十九世紀初這一百八十多年間，概率論由誕生以至形成獨立學科體系，但之前它經歷了一段為期頗長的「孕育期」，在這兒就不談了，讓我們只從 1654 年帕斯卡和費馬的工作起講吧。當時，法國有位文學家兼哲學家梅累向帕斯卡提出兩個問題，引起了他的興趣，在信上跟費馬展開了討論。這兩個問題如下：

(1)甲和乙相約賭若干局，誰先 s 勝局的就算是贏了。如今甲勝了 a 局(a 小於 s)而乙勝了 b 局(b 小於 s)，賭博中止。問應該怎樣攤分賭本才對呢？

(2)把一顆骰子連擲四次，其中至少擲得一次六點即算勝了。這遊戲對擲骰者來說是有利的，因為四次中至少擲得一次六點的機會是略大於½。但換了是擲三次，情形卻相反，因為三次之中至少擲得一次六點的機會是小於 $^1/_2$。現在把兩顆骰子一起擲若干次，其中至少擲得一次兩顆都是六點才算勝了，問至少要擲多少次才對擲骰者有利呢?

問題(1)在十五、十六世紀時已流傳，引起不少數學家的興趣。為簡便敘述起見、假定誰先勝三局便贏、現在甲勝兩局而乙勝一局。十五世紀末意大利數學家巴巧利(Pacioli)認為應該按已經贏得的局數的比例來分賭本，所以甲應佔賭本的 $^2/_3$，乙佔賭本的 $^1/_3$。十六世紀時卡當指出這樣分是不正確的，因為它完全沒有考慮每人必須再贏的局數，但他沒有給出正確的解答。到了十七世紀中葉，帕斯卡和費馬（還有另一位荷蘭數學家惠更斯(Huygens)）各按不同的理由給出正確的答案。所有這些解答，都是基於以下的原則：按贏得整局賭博的概率的比例來分賭本。例如費馬認為頂多再多玩兩局便完結這場賭博，在玩這兩局時，可能出現以下的四種情況：(a)甲勝第四局、甲勝第五局。(b)甲勝第四局、乙勝第五局。(c)乙勝第四局、

甲勝第五局。(d)乙勝第四局、乙勝第五局。其中只有(d)的情況才能使乙贏得整局賭博，既然四種情況以同樣可能性發生，所以甲應佔賭本的 $^3/_4$，乙佔賭本的 $^1/_4$。

關於問題(2)，帕斯卡寫給費馬的信上曾經說過：「我沒有時間把詳細的証明告訴你。那是關於一個數學上的難題，它困擾着梅累先生。他是一位非常有才幹的人，……。他告訴我他找出了數論上的一個錯誤，原因是這樣子：如果把一顆骰子連擲四次，出到一次六點的優勢是 671 對 625。如果把兩顆骰子連擲二十四次，出到一次兩顆都是六點的機會卻不再是優勢了。然而，24 比 36（指一次擲兩顆骰子可能出現的結果的數目）是等於 4 比 6（指一次擲一顆骰子可能出現的結果的數目）。這點謬誤使他感到十分憤怒，甚至使他認為算術是相悖的理論！」由這一段話，可見梅累提出問題(2)，對理論的好奇多於對賭博的興趣。看來，梅累被很多書本形容為「狂熱的賭徒」，是蒙上「不白之冤」！

這一類有關概率的討論，在當時西歐的數學圈子裏很受注意，惠更斯在 1657 年寫成《論賭博的計算》，裏面有這樣的一段話：「在任何場合我認為如果讀者仔細研究對象，當可注意到你處理的不僅是賭博而已，其中實際上包含了很有趣很深刻的理論基礎。」法國數學家蒙謨(Montmort)在 1708 年寫成《賭博遊戲的分析》，序言便說：「當我寫作此書時，腦子裏只想到如何滿足數學家的好奇，卻不曾想到如何幫助賭徒贏錢。我認為那些把時間浪費在賭博上的人，輸光了也是活該！」再遲一點，瑞士數學家 J · 伯努利(Jacob Bernoulli)在 1713 年寫成《猜度術》，是當時關於概率的權威著述。他也指出以賭博遊戲為例來討論概率論，只不過取其方便簡單而已。這些人的工作，把概率論的研究推進了一大步。說到這裏，也許應該回頭看看當時的社會發展，如何促使數學家開展概率論的研究。

遼闊的概率天地

中世紀的時候，社會的生產水平不高，需要用到的數學很簡單，連變量的數學也很少需要用到，就更少需要討論偶然現象了。因此，當時的人沒有意識到偶然現象的規律，但到了十六、十七世紀，社會發展起來，工商業發展起來，隨着海陸交通也發展起來，天文學和自然科學也發展起來。這些新的發展提出很多新的問題，其中好些涉及偶然現象的規律。為了徵兵徵稅，需要辦好人口調查統計；為了海上陸上保險事業，需要計算意外事故發生的概率；為了觀測天文學和物理學的實驗結果，需要估計量度的偶然偏差。儘管這些都只是以粗糙的形式出現，但數學家已經開始感覺到這類問題的重要性，同時也因而積累了大批素材，足以進行分析和整理的研究工作了。例如伽里略(Galileo)在 1632 年提到實驗觀察的誤差理論；格勞晏(Graunt)在 1662 年利用死亡率紀錄單的數據討論人口統計的問題；惠更斯在 1669 年提出死亡率曲線和壽命概率的概念；溫赫頓(Van Hudden)和第威(De Witt)在 1671 年把概率應用於保險年金的計算。十八世紀的概率論研究，更多是與實際問題有關了。歐拉(Euler)在概率論方面的工作，是與他研究人口統計和保險理論相連繫的。D．伯努利在 1760 年寫了一篇論文，根據資料作出種牛痘能延長人類平均壽命三年這個結論，回答了當時一些人因為種牛痘會產生副作用而引致死亡的疑懼。十九世紀初德國數學家高斯(Gauss)在天文與大地測量問題中總結了最小二乘法(Method of Least Square)理論，並且從誤差分析中發現了正態分佈(Normal Distribution)。差不多同樣時期，法國數學家泊松(Poisson)也發現了後世以他的名字命名的泊松分佈(Poisson Distribution)，還把它應用於射擊學，討論打中靶的概率。這段時期的研究，由法國數學家拉普拉斯(Laplace)

總結，在 1812 年寫成《分析概率論》這一部重要的經典著述。十九世紀以來，概率論的應用日益廣泛，它滲透到更多的學科去，推動了這些學科的發展。同時，在各個不同的領域出現的問題，也推動了概率論自身的理論方面的發展，例如在十九世紀中葉以切比雪夫(Chebyshev)和馬爾可夫(Markov)諸人為首的俄國概率論學派，得出一系列深刻的理論結果，大大地豐富了概率論的內容。踏入二十世紀後，概率論的發展和應用，比起前兩個世紀來，達到了前所未有的高度。

賭博問題對概率論的發展，不容否認是有一定的影響，然而它不是一個決定性的因素，更加不是唯一的因素。賭博遊戲既然「歷史悠久」，而且又是最顯而易見的偶然現象，它對概率論的發展產生刺激和影響，一點也不奇怪，但概率天地遼闊，又豈止限於幾顆骰子、幾張紙牌、和攪珠博彩遊戲呢？

加篇

兩個應用的例子

（1）誰先發球有分別嗎？

蕭文強

1． 在日常生活及大自然中碰見的現象，以偶然現象居多，即是說，現象發生與否是不肯定的。概率論是用來研究偶然現象的數學，因此它的應用很廣泛。這篇短文只選一個不重要卻是在身邊拈來的例子，旨在說明如何運用概率知識去分析事情。

十多年前有一次與一位酷愛壁球的英國友人談起球賽，他提出一個問題：「有好些球類運動，如壁球、羽毛球、排球，發球的一方勝了才能得分，否則勝的一方只是取回發球權。這種規則是否公平呢？」以下我們運用概率知識看看這回事。

近十年來，這些球類運動更改了規則，即使不是發球的一方勝了也能得分。這樣做，每局所花的時間不致太長，亦易於預計。不過，以下要算出來的結果，會否也是一個考慮因素呢？

2． 設甲、乙雙方球技相當，也就是說，甲勝一球的機會與乙勝一球的機會都是0.5。假定甲發第一球，勝了便取 1 分，輸了便把發球權拱手讓給乙；乙勝了便取 1 分，輸了便把發球權給回甲，餘此類推。那一方先取得 N 分便勝了該局。為簡化計算，假定沒有終局前一分打成平手的特別計分規則（通常在那種情況，一方需要連取兩分才算勝了該局）。讓我們計算以 N 比

M（M 在 0 與 $N-1$）終局的概率；若甲勝出便記作 $p_M = \mathrm{P}(N:M)$，若乙勝出便記作 $q_M = \mathrm{P}(M:N)$。

為求初步感覺，先看 $N=2$ 的情況，即是甲發第一球，誰先取得 2 分便勝了該局。設發球一方（不妨當是甲）勝一分的概率是 a，接球一方（不妨當是乙）勝一分的概率便是 $b=1-a$。要計算 a 並不困難，只用列舉全部可能的戰況：

甲、甲乙甲、甲乙甲乙甲、甲乙甲乙甲乙甲、等等，

每一串表示發球次序，最後一項是甲，顯示發球者（甲）勝。這些事件的概率依次是

$1/2, 1/2^3, 1/2^5, 1/2^7$，等等，

於是 $a = 1/2 + 1/2^3 + 1/2^5 + 1/2^7 + \cdots = 2/3$，而 $b = 1/3$。

現在，用一幅樹圖表達各種終局的可能 (見圖 1)：

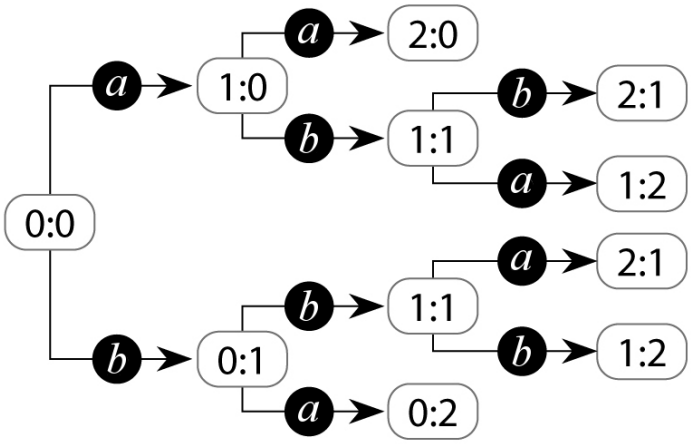

圖 1

由此計算出　$p_0 = \mathrm{P}(2:0) = a^2 = 12/27$，

$$p_1 = \mathrm{P}(2:1) = 2ab^2 = 4/27 \text{，}$$

$$q_1 = \mathrm{P}(1:2) = a^2b + b^3 = 5/27 \text{，}$$

$$q_0 = \mathrm{P}(0:2) = ab = 6/27 \text{。}$$

3． 換了是更大的 N，可以作同樣的計算，只不過那幅樹圖多取幾層吧。要做仔細分析，最好先設計一種較方便的記法。讓我們以一個二元 $(s+1)$ 數組 $t_0t_1\cdots t_s$（$t_0 = 0$，t_1 至 t_s 是 0 或 1）表示一局，比數是 $s-\ell:\ell$，該數組中有 ℓ 項 1。其實這一局的戰況是這樣的，$t_0 = 0$ 顯示甲開球，$t_i = 0$ 或 1 分別顯示第 i 球後由甲或乙開球，該局共開球 s 次，t_s 是 0 或 1 分別顯示該局的勝方是甲或乙。該局發生的概率是 $a^{s-k}b^k = 2^{s-k}/3^s$，其中 k 是 t_it_{i+1} 是 01 或 10 的個數。例如 $N = 2$ 的樹圖變成下面的樣子(見圖 2)：

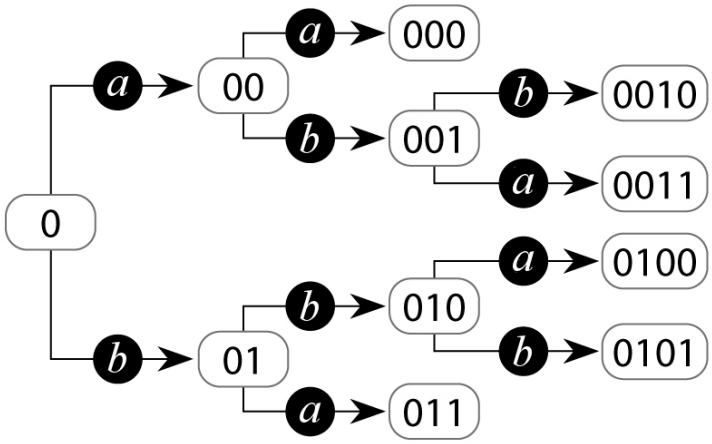

圖 2

000 顯示該局的戰況是 $1:0$、$2:0$，甲勝。0011 顯示該局的戰況是 $1:0$、$1:1$、$1:2$，乙勝。

要計算 $p_M = P(N:M)$，只用考慮全部以 0 開首，以 0 結尾，共有 $N+1$ 項 0 和 M 項 1 的二元 $(N+M+1)$ 數組；對每一個這樣的數組看看它當中有多少個 01 或 10，記作 k；把全部這些 2^{N+M-k} 加起來，記作 $a(N,M)$。於是，$p_M = a(N,M)/3^{N+M}$。類似地，考慮全部以 0 開首，以 1 結尾，共有 $N+1$ 項 0 和 M 項 1 的二元 $(N+M+1)$ 數組；得到相應的和記作 $b(N,M)$。於是，$q_M = b(M,N)/3^{N+M}$。

下一步是計算 $a(N,M)$ 和 $b(N,M)$，通常的手法是把 $a(N,M)$ 和 $b(N,M)$ 化作 $a(N,M-1)$，$a(N-1,M)$，$b(N,M-1)$，$b(N-1,M)$ 的關係式，最終達致 $N=0$ 或 $M=0$ 的情況。按照 $a(N,M)$ 和 $b(N,M)$ 的定義，小心寫一下便知道：

當 $M>0$，$a(0,M)=0$；當 $M=0$，$a(0,M)=1$；
當 $M>0$，$b(0,M)=2^{M-1}$；當 $M=0$，$b(0,M)=0$；
當 $N>0$，$a(N,0)=2^N$；$b(N,0)=0$。

把二元 $(N+M+1)$ 數組 $0**\cdots**0$ 分為兩種考慮，一種是 $0**\cdots*00$，另一種是 $0**\cdots*10$，小心分析便知道：

當 $N>0$，$a(N,M)=2a(N-1,M)+b(N-1,M)$。

把二元 $(N+M+1)$ 數組 $0**\cdots**1$ 分為兩種考慮，一種是 $0**\cdots*01$，另一種是 $0**\cdots*11$，小心分析便知道：

當 $M>0$，$b(N,M)=a(N,M-1)+2b(N,M-1)$。

從這些性質我們可以計算 $a(N,M)$ 和 $b(N,M)$ 的值(見圖 3)，也就可以計算 p_M 和 q_M 了。

	0	1	2	3	...	M	...
0	1	0	0	0	...	.	...
1	2	1	2	4	...	.	...
2	4	4	9	20	...	.	...
3	8	12	30	73	...	.	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	.	.	...
N	.	.	.	.	...	a(N,M)	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	.	⋮	...

	0	1	2	3	...	M	...
0	0	1	2	4	...	.	...
1	0	2	5	12	...	.	...
2	0	4	12	33	...	.	...
3	0	8	28	86	...	.	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	.	.	...
N	⋮	⋮	⋮	⋮	.	b(N,M)	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	.	⋮	...

圖 3

以壁球賽為例，$N=9$，終局的概率分佈是：

$P(9:0)=3359232/129140163$　　$P(0:9)=1679616/129140163$

$P(9:1)=5038848/129140163$　　$P(1:9)=3359232/129140163$

$P(9:2)=6718464/129140163$　　$P(2:9)=5038848/129140163$

$P(9:3)=8024832/129140163$　　$P(3:9)=6531840/129140163$

$P(9:4)=8911296/129140163$　　$P(4:9)=7721568/129140163$

$P(9:5)=9385632/129140163$　　$P(5:9)=8553600/129140163$

$P(9:6)=9491040/129140163$　　$P(6:9)=9022320/129140163$

$P(9:7)=9290160/129140163$　　$P(7:9)=9156240/129140163$

$P(9:8)=8852850/129140163$　　$P(8:9)=9004545/129140163$

最大機會是以 9 比 6 終局。甲的勝算是多高呢？那等於 $p_0+p_1+\cdots+p_{N-1}$，在這特殊情形 $(N=9)$，甲勝的概率是 $0.5348\cdots$，略高於一半。如果 $N=2$，甲勝的概率便會提高至 $0.5925\cdots$ 了。

4． 再運用多一些數學技巧，我們可以得到更多結果。這些計算用到母函數知識，在此不贅。我們甚至可以把 $a(N,M)$ 和 $b(N,M)$ 表示為涉及 N 和 M 的數式，並且由此知道
$p_0=2q_0$，$p_1=2q_1-q_0$，$p_2=2q_2-q_1$，……，
$p_{N-1}=2q_{N-1}-q_{N-2}$。

一個有趣的推論是甲勝的概率 $p_0+p_1+\cdots+p_{N-1}$ 等於 $(q_0+q_1+\cdots+q_{N-1})+q_{N-1}=[1-(p_0+p_1+\cdots+p_{N-1})]+q_{N-1}$，因此甲勝的概率是 $0.5+q_{N-1}/2$，不論 N 是什麼，永遠高於一半。開球一方勝了才得分這條規則，對甲（首局發球者）是有利的。

（2）統計學與投資：

從投資風險看「一擲千金」

林建

投資學的組合理論 (portfolio theory) 是一門比較新興的理論，由 Harry Max Markowitz 教授首先在 1952 年提出，憑此他拿到 1990 年度諾貝爾經濟學獎。此獎一向只頒給經濟學家，Markowitz 是第一批拿到經濟學獎的財務學者[註 1]。但你可否知道，這門既深入又實用的財務理論竟然是建基於一個非常基本的統計學概念？更有趣的是，這個基本概念就是中學生耳熟能詳的「標準差」。

統計學及概率論的研究對象是隨機變數。顧名思義，隨機變數在不同情況下，可以取不同的值。為了總結這一大堆數值，統計學家提議計算兩個統計數字(summary statistic)，就是平均值(mean)與標準差(standard deviation)。平均值很容易理解，把數值之和除以個數便得出平均值。假如變數取值 $x_1, x_2, ..., x_n$，其中 n 為個數，那麼平均值 m 為

$$m = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \text{ ，}$$

[註 1] 與 Markowitz 同時拿到諾貝爾經濟學獎的還有兩位財務學者，他們是 William F. Sharpe 和 Merton H. Miller.

至於標準差 s，則用以下方法得出，

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\ldots+(x_n-m)^2\right]}$$ [註2]。

平均值代表了變數取值的中間位置，而標準差則代表了數值的分散度。如果標準差很小，這些數值都集中於平均值附近；如果標準差很大，這些數值距離平均值就較遠，換而言之，分散度也較大。

從事任何一個投資項目，一定要考慮投資的回報率，若以 $10,000 購入一隻股票，一年後，股票的價值為$11,000 (中間沒有收到股息)，投資者的回報率為

$$\frac{11,000-10,000}{10,000}=10\%$$ 。

但深入地想一下，投資回報率，其實是一個隨機變數。因為雖然過往一年的回報率為 10%，但明年的回報率，就非事前能決定，所以回報率是一個不折不扣的隨機變數。這個變數每年都可以取不同的值，這些值的平均數，當然代表了投資的平均回報率(又稱期望回報率)。另一方面，這些值的標準差，代表了回報率的分散度。值得注意的是：這個分散度其實就是投資的風險。假如回報率為一個常數，分散度等於零，即是回報沒有風險，但假如回報率的分散度大，表示回報十分不穩定。由於回報率的不穩定性就是投資的風險，用回報率的標準差來量度

[註2] 用 $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\ldots+(x_n-m)^2\right]}$ 可以得出更準確的標準差估計。

投資風險是最合理不過的。Markowitz 就是第一位提出用回報率的標準差來量度投資風險的學者。

根據 1926 年至 2005 年的數據，投資於美國大型股票及美國長期債券，分別有如下的年回報率[註3] (單位為%)：

年度	美國大型股票	美國長期債券
1926	12.21	4.54
1927	35.99	8.11
1928	39.29	-0.93
1929	-7.66	4.41
1930	-25.9	6.22
1931	-45.56	-5.31
⋮	⋮	⋮
2000	-9.1	20.27
2001	-11.89	4.21
2002	-22.1	16.79
2003	28.69	2.38
2004	10.88	7.71
2005	4.91	6.5

投資於大型股票的期望回報率為

$$m_1 = \frac{1}{80}(12.21 + 35.99 + \cdots + 4.91)$$

$$= 12.15\,(\%) \quad ,$$

[註3] 詳細數據請參考 Bodie, Kane 和 Marcus 的 “Investments” 8th Edition, McGraw Hill International Edition, 2009

投資於長期債券的期望回報率為

$$m_2 = \frac{1}{80}(4.541 + 8.11 + \cdots + 6.5)$$

$$= 5.68\,(\%) \quad ,$$

故投資於大型股票有較高的期望回報率。

投資於大型股票及長期債券之風險，其運算如下:

投資於大型股票的風險為

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{80}[(12.21 - 12.15)^2 + (35.99 - 12.15)^2 + \cdots + (4.91 - 12.15)^2]}$$

$$= 20.26\,(\%) \quad ,$$

投資於長期債券的風險為

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{80}[(4.54 - 5.68)^2 + (8.11 - 5.68)^2 + \cdots + (6.5 - 5.68)^2]}$$

$$= 8.09\,(\%) \quad ,$$

故投資於股票有較高的風險。

看來高風險帶來高回報，還是有點道理的[註4]!

[註4] 風險和期望回報的關係，在財務學內的 CAPM 理論內有更準確及細緻的描述。

以上計算可總結於下表:

	回報率之平均值(m)	回報率的標準差(s)
甲	12.15(%)	20.26(%)
乙	5.68(%)	8.09(%)

項目的平均回報率代表該項投資的賺錢能力，而回報率的標準差代表該項目的投資風險。作為一個理性的投資者，你要在這兩個項目中選一個來投資，你會選那一個項目？其實兩者都是理性的選擇，但要決定選股還是選債就要看該投資者的風險胃口(risk appetite)了。保守的投資者為了迴避風險，會偏好於低回報的債券；進取的投資者為了取得高回報，會偏好於選擇一個高風險的項目，兩者都是理性的選擇。要把以上兩個選擇，都熔入一個理性的爐子裡，財務學者提出以下的模型，來覆蓋所有的理性投資者。在這個模型內，理性的投資者在考慮一個項目時，會先計算該項目的效用(utility)，比較兩個項目時，他會選取效用較大的項目。項目的效用，可視為期望回報率及標準差的函數，一個很常用的效用函數，由以下公式得出

$$U = m - 0.005 \times A \times s^2 \text{，}$$

在上式中，U 為項目的效用， m 為項目的期望回報率，s 為項目風險，A 代表了投資者厭惡風險的程度。以上的效用函數，有一個特色，大的 m 會得到大的 U，而大的 s 會令到 U 變小。換句話說，以上的效用函數，反映了投資者既喜歡回報但又想迴避風險的事實，但由於投資者對風險這一塊，有不同的迴避程度，所以公式在 s^2 之前，還要加一個常數 A。這個常數 A 代表了投資者對風險厭惡(risk aversion)的程度，又稱為投資者的風險厭惡指數(risk aversion coefficient)。跟據這個理論，不同的投資者，用不同的風險厭惡指數。由於 A 取較大的值時項目的

效用會大幅度地被刪減，所以很想迴避風險的投資者的 A 值都應該很大。

假如投資者的風險厭惡指數為 $A = 1$，他投資股票的效用為

$$U_{股票} = 12.15 - 0.005 \times 1 \times 20.26^2 = 10.09，$$

他投資債券的效用為

$$U_{債券} = 5.68 - 0.005 \times 1 \times 8.09^2 = 5.35，$$

他會選擇投資於股票。

但假如投資者的風險厭惡指數為 $A = 10$，他投資股票的效用為

$$U_{股票} = 12.15 - 0.005 \times 10 \times 20.26^2 = -8.37，$$

他投資債券的效用為

$$U_{債券} = 5.68 - 0.005 \times 10 \times 8.09^2 = 2.41，$$

他會選擇投資於債券。

大家看過《一擲千金》這個電視遊戲嗎？這個遊戲有一個英文名字叫 “Deal or No Deal” ，讀者如對這個遊戲有興趣，大可登入這個網址試玩一下：

http://static.zybez.net/games/deal.swf

遊戲是這樣的：有 26 個信封，裡面各藏有一張支票，支票內的銀碼由一元至一百萬元不等。參賽者首先選取一個信封，如他能通過以下關卡，這個信封內的支票就屬參賽者所有。選定信封後，主持人叫參賽者選出其他六個信封，逐一打開，看看裡面有多少銀碼。信封打開後，主持人提議用某一個銀碼來收購參賽者繼續玩下去的權利。參賽者可以選擇收錢，而放棄玩下去(Deal)，但他也可以選擇不接受收購，亦即繼續玩下去(No Deal)。如果玩下去的話，便要重複以上過程。

無線電視在 2006 年推出這個《一擲千金》的遊戲，筆者最初沒有留意，當筆者第一次收看時，卻看到一個精彩絕倫的場面。當年那位男參賽者，最後只剩下兩個信封，分別藏有$1,000,000 及$1，其中一個信封，是他在開始時已選定的信封，這時主持人提議用$450,000 來收購他手上的信封，他可以接受(Deal) 或不接受這個收購 (No Deal)。如他接受收購，他可以帶走 45 萬元，如他不接受收購，他便要打開另外一個不屬於他的信封，如打開後信封內只有$1，他可以拿走手上的信封(一百萬元)，但如打開的信封內有一百萬元，他就只可以拿走一元了。

節目發展到這個階段，所有的觀眾都被吸引住了。他們都在猜，究竟這位男參賽者選擇 Deal 還是 No Deal 呢? 結果男參賽者經過一輪苦思，選擇玩下去，打開剩下的一只信封，而信封內竟然是……一百萬元。他當然十分沮喪，當場灑下男兒淚，因為他手上的信封內只有一大元正。

由於這個節目當時引起相當大的哄動，有些傳媒把這位男參賽者稱為「一蚊雞先生」。聽說後來他得到無線電視的賞識並羅致了他為旗下藝員，總算是喜劇收場。其實這故事背後還有不少小插曲，例如參賽者的媽媽，當場看到兒子落淚，即表示 “just game, mummy never mind.” (只是遊戲,媽咪無所謂) [註5]，可見母愛十分偉大。筆者行此文時，剛好是母親節，自不免鉤起對亡母的懷念。

[註5] 見 http://ol.mingpao.com/cfm/Archive1.cfm?File=20061231/sac01/mak1.txt 網址

筆者相信不是每位參賽者都會選擇玩下去的，其實玩下去與否都是理性的選擇，一切都決定於參賽者的風險胃口，但「什麼人會選擇不玩下去呢?」 這個問題其實可以用風險厭惡系數的概念來分析。

參賽者的兩個選擇，其實代表了兩個投資。由於主持人已答應付給參賽者$45 萬元，所以就要看參賽者怎樣利用這 45 萬元了。參賽者有兩個選擇：

(甲)不玩下去，(乙)玩下去。

不玩下去的選擇，其實就是選擇不投資，可以用下圖理解(甲)這個選擇:

45 萬 ⟶ **45 萬**

期望回報率為

$$m_{甲} = (45 - 45)/45$$
$$= 0(\%)$$

由於參賽者穩得 45 萬元，所以這個選擇沒有風險，標準差為

$$s_{甲} = 0(\%)$$ ，

選擇甲的效用為

$$U_{甲} = 0 - 0.005 \times A \times 0^2 = 0$$

玩下去的選擇，可以用下圖代表：

期望回報率為

$$m_{乙} = (122\%)/2 + (-100\%)/2 \quad = 11(\%)\text{，}$$

標準差為

$$s_{乙} = \sqrt{\frac{1}{2}(122\% - 11\%)^2 + \frac{1}{2}(-100\% - 11\%)^2} = 111(\%)\text{。}$$

選擇乙的效用為

$$U_{乙} = 11 - 0.005 \times A \times 111^2 = 11 - 61.605 \times A\text{。}$$

參賽者會比較 $U_{甲}$ 和 $U_{乙}$，如果 $U_{甲} > U_{乙}$，他就放棄玩下去，反之他的理性選擇就是要玩下去!

什麼時候 $U_{乙} > U_{甲}$ 呢？ 可由下式決定：

$U_{乙} > U_{甲}$，即

$11 - 61.605 \times A > 0$，故 $A < 0.18$。

如果參賽者的風險厭惡指數小於 0.18 的話，他便會決定玩下去。「一蚊雞先生」的風險厭惡指數，應該是小於 0.18 吧！其實他的選擇並非不理性，只是他的風險厭惡指數很低而已。

作者簡介

蕭文強，一九六七年在香港大學畢業後，赴美國哥倫比亞大學修數學，一九七二年獲博士學位。一九七二年至一九七五年任教於美國邁亞密大學，一九七五年回香港大學任教，至二〇〇五年退休。研究領域包括代數，組合數學，數學史，更致力融匯數學意念的演化於數學教育。數普著作有《為什麼要學習數學？》（1978；1992 再版；1995 再版），《概率萬花筒》（與林建合著，1982；2007 再版），《數學證明》（1990；2007 修訂版），《1,2,3,…以外》（1990；1993 修訂版；1994 再版），《波利亞計數定理》（1991），《杵臼關節・阿基米德・多面體》（2004），《心中有數》（2009），編有《抖擻文選：數學教育論叢》（1981），《香港數學教育的回顧與前瞻：梁鑑添博士榮休文集》（1995）。

林建，一九六七年在香港大學畢業後，赴美國威斯康辛大學修數學，一九七二年獲博士學位。回港後任教於香港大學統計系至一九九五年，為該系教授。一九九五年一月，受聘於香港浸會大學的財務及決策系，為該系的講座教授兼系主任，二〇〇九年退休，獲浸會大學頒授榮休教授名銜。除了在學報上廣泛發表研究成果外，林建教授在財經界有廣泛的實踐經驗，曾出任香港期貨結算所及香港結算所董事，及香港證券學會董事。並曾參予多個大型的諮詢項目，包括為法律界作「專家證人」及作為「內幕交易審裁署」的小組成員之一等。林建教授現為香港統計學會榮譽會員。

教育局數學教育組編訂
政府物流服務署印
Prepared by the Mathematics Education Section,
the Education Bureau of the HKSAR
Printed by the Government Logistics Department

ISBN 978-988-8040-57-5
9 789888 040575